

Topologiese digte deelversamelings van 'n ring

Stefan Veldsman

Departement Wiskunde, Universiteit van Port Elizabeth, Posbus 1600, Port Elizabeth 6000

UITTREKSEL

Die topologie T met basis $B = \{\{0\}\} \cup \{I \setminus \{0\} \mid I \text{ 'n ideaal van } R\}$ gedefinieer op 'n ring R maak sy verskyning op verskeie plekke in die teorie van ringe. Enkele eienskappe van hierdie topologie word bespreek. Onder andere word aangetoon dat egte geslote ideale die uitsondering eerder as die reël is. Hierdie topologie is nie versoenbaar met skeiding nie: 'n Ring is T_0 as en slegs as $(a) = (b)$ impliseer $a = b$ en T_1 as en slegs as dit diskreet is. Die diskrete ringe word volledig gekarakteriseer en daar word aangetoon dat 'n homomorfie kontinu is as en slegs as die kern 'n geslote ideaal is.

ABSTRACT

Topological dense subsets of a ring

The topology T with base $B = \{\{0\}\} \cup \{I \setminus \{0\} \mid I \text{ an ideal in } R\}$ defined on a ring R makes its appearance quite often in the theory of rings. Some properties of this topology are discussed. Amongst others, it is shown that proper closed ideals is more an exception than a rule. This topology is not compatible with separation: A ring is T_0 if and only if $(a) = (b)$ implies $a = b$ and T_1 if and only if it is discrete. The discrete rings are completely characterized and it is shown that a homomorphism is continuous if and only if the kernel is a closed ideal.

1. INLEIDING

In die algebra, en meer spesifiek in die kategorie van alle assosiatiewe ringe (nie noodwendig met identiteit nie), is daar 'n verskeidenheid van konstruksies wat vereis dat 'n sekere deelversameling van 'n ring "dig" in die ring moet wees. In §2 word 'n topologie gedefinieer met dié eienskap dat heelwat van die algebraïese vereistes vir "digtheid" in werklikheid die topologiese digtheid ten opsigte van die genoemde topologie is (§3). Hierdie topologie, vanweë sy algebraïese aard, het nie veel skeiding nie (§4).

2. DIE TOPOLOGIE

Laat R 'n ring wees met $a \in R$ en S 'n deelversameling van R . a heet 'n *verdigtingspunt* van S as $S \cap I \setminus \{a; 0\} \neq \emptyset$ vir elke ideaal I in R met $a \in I$. Dit is duidelik dat $\emptyset$ en $\{0\}$ geen verdigtingspunte het nie. Ook is 0 nooit 'n verdigtingspunt van enige deelversameling van R nie. 'n Ekwivalente en handiger definisie van 'n verdigtingspunt a van S is: a is 'n verdigtingspunt van S as $S \cap (a) \setminus \{a; 0\} \neq \emptyset$ waar (a) dié ideaal in R voortgebring deur a is. Vir enige $S \subseteq R$, laat $\bar{S} = S \cup \{a \in R \mid a \text{ is 'n verdigtingspunt van } S\}$. Vir $0 \neq a \in R$ is $a \in \bar{S}$ as en slegs as $S \cap (a)$ 'n nie-nulelement bevat.

Uit die bostaande is dit dan maklik om die volgende te bewys:

2.1 Stelling

$S \rightarrow \bar{S}$ is 'n topologiese afsluitingsoperator op die tralie van alle deelversamelings van die ring R .

Ons kry dus 'n topologie, sê T^1 (bls. 73), op R met die T -afsluiting van enige $S \subseteq R$ gegee deur $\bar{S}$. Hierdie topologie het $B = \{\{0\}\} \cup \{I \setminus \{0\} \mid I \text{ 'n ideaal vir } R\}$ as 'n basis en word dus bepaal deur die ideaalstruktuur op R . 'n Deelversameling S van R is dus oop as en slegs as dit die volgende voorwaarde bevredig:

$a \in S$ impliseer $(a) \setminus \{0\} \subseteq S$. Dus is enige ideaal oop, maar die omgekeerde is nie noodwendig waar nie (die vereniging van twee ideale is oop maar hoef nie weer 'n ideaal te wees nie). As S 'n ondergroep van R is, dan is S oop as en slegs as S 'n ideaal in R is. Let ook op dat $\{0\}$ beide oop en geslote is.

Ons kan natuurlik ook 'n linker (regter) verdigtingspunt definieer deur ideaal met linker (regter) ideaal in die definisie te vervang. Op dieselfde wyse as hierbo kry ons dan 'n topologie. Verder, as C die klas van alle ideale van R is, dan is C ook 'n basis vir 'n topologie op R . Hierdie topologie is nie baie bevredigend nie, want 0 is bevat in elke nie-leë oop versameling.

In wat volg, tensy anders vermeld, is alle topologiese begrippe ten opsigte van die topologie wat deur Stelling 2.1 bepaal word.

3. AFSLUITING EN DIGTHEID

Vir 'n ideaal I in R , word die afsluiting van I gegee deur $\bar{I} = \{a \in R \mid a = 0 \text{ of } I \cap (a) \neq \emptyset\}$ en, soos gewoonlik, I is dig in R as $\bar{I} = R$. As R 'n (eensydige) identiteit het, dan is dit altyd in die afsluiting van enige deelversameling van R wat 'n nie-nulelement bevat. Dit wil sê, in sulke ringe is die enigste nie-nul geslote ideaal die ring self. 'n Essensiële ideaal in 'n ring is 'n nie-nulideaal wat 'n nie-nuldeursnede met elke ander nie-nulideaal het. Uitgedruk in terme van ons topologie, kry ons: 'n nie-nulideaal is 'n essensiële ideaal as en slegs as dit dig is in die ring. Ons kry dus:

3.1 Stelling

Elke ring met (eensydige) identiteit of elke ring waarvan elke nie-nulideaal essensiël is, het geen egte geslote ideale nie.

Die afsluiting van 'n ideaal hoef dus nie 'n ideaal te wees nie. Byvoorbeeld, in Z_6 , die heelgetalle mod 6, is

die afsluiting van die ideaal voortgebring deur 3 nie 'n ideaal nie, want Z_6 het 'n identiteit. As voorbeeld van 'n ring waarvan elke ideaal geslote is, gee ons die nulring (d.w.s. $ab=0$ vir alle a en b) op die Klein vier-groep.

Die meeste van die bekende kwosientringe of ring-uitbreidings is só dat die ring dig in die omvattende ring is. Laat R 'n ring met identiteit wees met S 'n onderring van R . R heet 'n intrinsieke uitbreiding van S^2 as $S \cap I \neq 0$ vir alle nie-nulideale I in R , dit wil sê, as en slegs as S dig is in R . As R 'n ring van linker-kwosiente van S is in die sin van Lambek⁵ (hoofstuk 4), Faith en Utimi,² of die klassieke ring van linker-kwosiente⁴ (Hoofstuk 7), dan is $\bar{S} = R$. Natuurlik is die ring van rasionale getalle dig in die ring van reële getalle. Om die waarheid te sê, elke nie-nulonderliggaam van 'n liggaam is dig in die liggaam.

'n Klaarblyklike goeie substituuat vir die gebrek aan kommutatiwiteit in 'n ring is deur Van der Walt gegee.⁸ Hy definieer die kwasi-sentrum Q van 'n ring R deur

$Q := \{x \in R \mid \text{vir alle } y \in R \text{ is daar } a, b \in R \text{ met } xy = ax \text{ en } yx = xb\}$. R heet 'n ring met digte kwasi-sentrum as elke ideaal I in R voortgebring word deur $Q \cap I$. Dit is duidelik dat, in so 'n ring, die kwasi-sentrum Q dig is in R .

Die direkte veralgemening van 'n priemring van die kommutatiewe na die nie-noodwendig kommutatiewe geval gee aanleiding tot die begrip volledig priem. Dit wil sê, 'n ring is volledig priem as en slegs as dit geen nie-nulnuldeler het nie, (d.w.s. al die nie-nul-elemente is regulier). Vir 'n nie-kommutatiewe ring is die voorwaardes van volledig priem klaarblyklik te streng – baie van die gewenste eienskappe is nie meer geldig nie. Verskeie ander soorte priem het dus die lig gesien. Ons beskou twee van hierdie veralgemenings: Eerstens, as 'n veralgemening van volledig priem, kan ons vereis dat nie elke nie-nulelement regulier moet wees nie, maar dat die ring net "genoeg" reguliere elemente moet hê. Laat S dus al die reguliere elemente van die ring R wees – gerieflikheids-halwe aanvaar ons dat $0 \in S$. Deur dan te vereis dat S dig in R moet wees, kry ons 'n veralgemening van volledig priem. Dit is presies die sterk priemringe van graad een, soos gedefinieer deur Handelman en Lawrence.³ Ons kan net noem dat Van der Walt⁹ sulke ringe super-priem noem.

Tweedens, 'n ring is volledig priem as en slegs as die nie-nulelemente 'n multiplikatiwe geslote versameling vorm. As 'n verdere veralgemening van volledig priem, kan dan vereis word dat die nie-nul-elemente van die ring R 'n multiplikatief geslote deelversameling bevat wat dig is in $R \setminus \{0\}$ en nie $R \setminus \{0\}$ self hoef te wees nie. Sulke ringe is presies die s-priemringe van Van der Walt.⁷

Ons laaste voorbeeld kry ons in die algemene radikaalteorie van ringe (in die sin van Kurosh en Amitsur).¹¹ Laat P 'n eienskap wees wat 'n element van 'n ring kan hê (bv. idempotensie, eenheid, identiteit, nilpotensie). 'n Element a in die ring R heet 'n P -element as a die eienskap P in R het. Gerieflikheids-halwe aanvaar ons dat 0 beide 'n P -element en 'n

$\sim P$ -element is, waar $\sim P$ die logiese negering van P is. 'n Ring heet 'n P -ring as elk van sy elemente 'n P -element is. Wiegandt¹⁰ het die nodige voorwaardes op P gegee sodat die klas van alle P -ringe, aangedui met $R(P)$, 'n radikaalklas is. Die halfenkelvoudige klas bepaal deur die radikaalklas $R(P)$, aangedui met $SR(P)$, bestaan uit al die ringe wat geen nie-nulideale het wat in $R(P)$ is nie. As R_P die versameling van alle $\sim P$ -elemente van R is, dan kan $SR(P)$ gekarakteriseer word deur $SR(P) = \{R \mid R \text{ is 'n ring met } R_P \text{ dig in } R\}$. Byvoorbeeld, as P die nilpotente eienskap is, dit wil sê $x^n = 0$, dan is $R(P)$ die nilradikaalklas. Die belangrike nil-halfenkelvoudige ringe is dan presies al dié ringe waarvoor die nie-nilpotente elemente dig is in die ring. Netso, as P die links kwasiereguliere eienskap is (x is links kwasieregulier as daar 'n y is sodat $y + x - yx = 0$), dan is die P -ringe die Jacobson-radikaalringe. Die Jacobson halfenkelvoudige ringe is presies al dié ringe waarvoor die nie-(links kwasiereguliere) elemente dig is in die ring.

4. SKEIDING

Om mee te begin, kan ons net noem dat R die indiskrete topologie het as en slegs as $R = 0$. Verder geld dat R enkelvoudig is as en slegs as ϕ , $\{0\}$, R en $R \setminus \{0\}$ die enigste oop deelversamelings van R is. Ons kan nie veel skeiding verwag ten opsigte van ons topologie nie, en wel om die volgende twee redes: Eerstens, enige element $x \neq 0$ in 'n ring is bevat in 'n kleinste oop deelversameling, naamlik $(x) \setminus \{0\}$. Tweedens, die afsluitingsoperator van Stelling 2.1 is ook 'n algebraïese afsluitingsoperator. Dit beteken dat vir enige $S \subset R$, is $\bar{S} = \bigcup \{\overline{\{x\}} \mid x \in S\}$. In enige topologiese ruimte X waar $\bar{S} = \bigcup \{\overline{\{x\}} \mid x \in S\}$ vir alle $S \subseteq X$, geld die volgende: X is 'n T_1 -ruimte as en slegs as X 'n diskrete ruimte is.

4.1 Stelling

'n Ring R is T_0 as en slegs as $(a) = (b)$ impliseer $a = b$ vir enige a, b in R .

Bewys. Laat R T_0 wees en veronderstel $(a) = (b)$ vir 'n a, b in R . As $a \neq b$, kan ons, sonder verlies aan algemeenheid, aanvaar dat daar 'n oop omgewing U van a is met $b \notin U$. As $b = 0$, is $(a) = (b) = 0$ wat teenstrydig is met $a \neq b$. Dus is $b \neq 0$ en $b \in (b) \setminus \{0\} = (a) \setminus \{0\} \subseteq U$ want U is oop. Maar $b \notin U$. Dus moet $a = b$. Omgekeerd, as $a \neq b$, $a, b \in R$, dan, uit ons aanname, is $(a) \neq (b)$. Dus is $b \notin (a)$ of $a \notin (b)$, sê $b \notin (a)$. As $a = 0$, dan is $b \neq 0$ en is $\{0\}$ 'n oop omgewing van a met $b \notin \{0\}$. As $a \neq 0$, dan is $(a) \setminus \{0\}$ 'n oop omgewing van a wat nie b bevat nie. Die geval $a \notin (b)$ word soortgelyk gehanteer. Dus is R T_0 wat die bewys voltooi.

Omdat $(a) = (-a)$ vir enige $a \in R$, moet die karakteristiek van 'n T_0 -ring noodwendig 2 wees. Die ring van alle deelversamelings van 'n versameling met twee elemente is 'n voorbeeld van 'n (nie-diskrete) T_0 -ring.

Daar is presies drie soorte T_1 -ringe (= diskrete ringe). Hulle word gegee deur:

4.2 Stelling

R is T_1 as en slegs as R een van die volgende is: die eenelementring 0 , die twee-elementliggaam $Z_2 = \{0; 1\}$ of 'n nulring met karakteristiek twee.

Bewys. Dit is duidelik dat enige van die genoemdes T_1 moet wees. Veronderstel dus dat $R (\neq 0)$ T_1 is. Dan moet R karakteristiek 2 hê. Omdat R diskreet is, moet $\{x\}$ oop wees en dus is $(x) \setminus \{0\} \subseteq \{x\}$ vir enige $x \in R$. Dus is $(x) = \{x; 0\}$. Hieruit volg dat $xy = 0$ vir alle $x \neq y$ in R . Inderdaad, omdat $xy \in (x) = \{x; 0\}$, is $xy = x$ of $xy = 0$. As $x = xy \in (y) = \{y; 0\}$, dan is $x = xy = y$ wat teenstrydig is. Ons onderskei nou twee gevalle:

Eerstens, veronderstel R het 'n nie-nul idempotente element e . Laat $b \in R$.

As $b \neq 0$ en $b \neq e$, dan is $e - b \neq e$. Dus is $0 = e(e - b) = e^2 - eb = e$ wat teenstrydig is. Dus moet $b = 0$ of $b = e$ en volg $R \cong Z_2$.

Tweedens, as R geen nie-nul idempotente element het nie, is

$R^2 = 0$: Vir enige $x, y \in R$ weet ons reeds dat $xy = 0$ as $x \neq y$. As $x = y$, kry ons $xy = x^2 \in \{x; 0\}$ en as $x \neq 0$, moet $xy = 0$.

5. ONDERRINGE EN DIE RELATIEWE TOPOLOGIE

Vir 'n gegewe ring R met onderring S , hoef die relatiewe topologie op S en die topologie op S as 'n ring beskou nie dieselfde te wees nie. Die volgende stelling karakteriseer die onderringe waarvoor dit wel geld. Ons maak egter eers die volgende afspraak ten opsigte van notasie: T en T' sal die topologieë (van Stelling 2.1) op R en S respektiewelik aandui met T_S die relatiewe topologie op S . Vir $a \in S$, sal $(a)_S$ en $(a)_R$ die ideale voortgebring deur a in S en R respektiewelik aandui.

5.1 Stelling

$T' = T_S$ as en slegs as $(a)_S = S \cap (a)_R$ vir alle $a \in S$.
Bewys. As $T' = T_S$, moet ons net bewys dat $S \cap (a)_R \subseteq (a)_S$ want die omgekeerde insluiting geld altyd. Omdat $(a)_S \in T' = T_S$, is $(a)_S = S \cap V$ vir 'n V oop in R . Omdat beide 0 en a in V is, is $(a)_R \subseteq V$. Dus is $S \cap (a)_R \subseteq S \cap V = (a)_S$. Omgekeerd, veronderstel $S \cap (a)_R = (a)_S$ vir alle $a \in S$. Laat $U \in T_S$. Dan is $U = S \cap V$ vir 'n V oop in R . Laat $a \in U$. Dan is $a \in V$ en dus is $(a)_R \setminus \{0\} \subseteq V$. Dus is

$$(a)_S \setminus \{0\} = [S \cap (a)_R] \setminus \{0\} \subseteq S \cap V = U,$$

dit wil sê, $U \in T'$. As $U \in T'$, laat $W = \bigcup \{(a)_R \mid a \in U\}$. As $0 \in U$, laat $V = W$, andersins laat $V = W \setminus \{0\}$. In beide gevalle is V oop in R en $U = S \cap V$. Dus is $U \in T_S$ wat die bewys voltooi.

As R 'n Boolese ring ($x^2 = x$ vir alle $x \in R$), of 'n Von Neuman reguliere ring (vir alle $a \in R$ is daar 'n $x \in R$ met $a = axa$) en S is 'n ideaal in R , dan is $(a)_R = S \cap (a)_R$ vir alle $a \in S$.

6. KONTINUÏTEIT

Vir 'n homomorfie $f: R_1 \rightarrow R_2$, hoef f nie kontinu te wees nie. Vir kontinuïteit is die bestaan van geslote ideale belangrik, want ons het die volgende:

6.1 Stelling

$f: R_1 \rightarrow R_2$ is kontinu as en slegs as die kern van f 'n geslote ideaal is.

Bewys. Ons sal die kern van f met $\ker f$ aandui. As f kontinu is, sal $f^{-1}(B) \subseteq \overline{f^{-1}(\overline{B})}$ vir alle $B \subseteq R_2$. In die besonder, vir $B = \{0\}$, kry ons

$$\overline{\ker f} = \overline{f^{-1}(\{0\})} \subseteq f^{-1}(\overline{\{0\}}) = f^{-1}(\{0\}) = \ker f$$

omdat $\{0\}$ 'n geslote deelversameling van R_2 is.

Omgekeerd, veronderstel $\overline{\ker f} = \ker f$. Laat $U \subseteq R_1$. Ons sal aantoon dat $f(\overline{U}) \subseteq \overline{f(U)}$ waaruit die kontinuïteit van f sal volg. Dit is duidelik dat as $U = \emptyset$ of $U = \{0\}$, die gewenste insluiting volg. Veronderstel dus dat $U \neq \emptyset$ en $U \neq \{0\}$. Laat $x \in f(\overline{U})$, sê $x = f(y)$ met $y \in \overline{U}$. As $y \in U$ is ons klaar. Veronderstel dus dat y 'n verdigtingspunt van U is. Dan is $U \cap (y) \setminus \{y; 0\} \neq \emptyset$. Laat $z \in U$ met $z \in (y)$ en $z \neq y$, $z \neq 0$. As $f(z) = x$, dan is $x = f(z) \in f(U) \subseteq \overline{f(U)}$. As $f(z) = 0$, dan is $z \in \ker f \cap (y) \setminus \{y; 0\}$, dit wil sê, $y \in \overline{\ker f} = \ker f$. Dus is $x = f(y) = 0 = f(z) \in f(U) \subseteq \overline{f(U)}$. Veronderstel dus dat $f(z) \neq x$ en $f(z) \neq 0$. Dan is $f(z) \in f(U) \cap (x) \setminus \{x; 0\}$ en dus is $x \in \overline{f(U)}$ wat die bewys voltooi.

Uit hierdie stelling en omdat $\{0\}$ 'n geslote ideaal is, volg dat enige injektiewe homomorfie kontinu is. Ons kan ook net noem dat enige surjektiewe homomorfie 'n oop afbeelding is.

Laastens, om mee af te sluit, kan ons net noem dat daar nog verskeie algebraïese of topologiese eenskappe is wat ondersoek kan word. Byvoorbeeld, vir watter ringe sal die topologie kompak wees, of wat is die invloed van kettingvoorwaardes op die topologie?

Ontvang 30 Mei 1985; aanvaar 26 Februarie 1986.

VERWYSINGS

1. Dugundji, J. (1966). *Topology* (Tweede uitgawe) (Allyn and Bacon Inc., Boston).
2. Faith, C & Utimi, Y. (1966). Intrinsic extensions of rings, *Pacif. J. Math.*, 14, 505-512.
3. Handelman, D. & Lawrence, J. (1975). Strongly prime rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 211, 209-223.
4. Herstein, I.N. (1968). *Noncommutative rings*, Carus Math Monographs No. 15, John Wiley and Sons, Inc.
5. Lambek, J. (1966). *Lectures on rings and modules* (Blaisdell Publishing Company, Waltham Mass).
6. McCoy, N.H. (1949). Prime ideals in general rings, *Amer. J. Math.*, 71, 823-833.
7. Van der Walt, A.P.J. (1964). Contributions to ideal theory in general rings, *Indagationes Math.*, 26, 68-77.
8. Van der Walt, A.P.J. (1967). Rings with dense quasi-centre, *Math. Zeitschr.*, 97, 38-44.
9. Van der Walt, A.P.J. (1981). Prime rings – the strong and the not-so-strong, *Proc. Third Alg. Simp.*, University of Pretoria, 91-97.
10. Wiegandt, R. (1975). Radicals of rings defined by means of elements, *Osterreich Akad. Wiss. Math. Naturwiss.*, SB II, 184, 117-125.
11. Wiegandt, R. (1974). *Radicals and semisimple classes of rings*, Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics (Kingston, Ontario).