

Die berekening van vloeiing in 'n roterende annulus deur die metode van kunsmatige saamdrukbaarheid

Henriëtte Grobler en J.A. Snyman

Departement Toegepaste Wiskunde, Universiteit van Pretoria, Pretoria 0002

UITTREKSEL

Die vloeiing van 'n onsaamdrukbare, viskeuse vloeier word ondersoek aan die hand van die numeriese oplossing van die gediskretiseerde Navier-Stokes- en kontinuïteitsbeheervergelykings. In die besonder word vloeiing in 'n annulus bestaande uit twee koaksiale silinders wat elk ten opsigte van die ander kan roteer, en met 'n voorgeskrewe drukval oor die lengte van die silinder, beskou. Die oplossings word bereken deur die toepassing van Chorin se metode van kunsmatige saamdrukbaarheid, waarin die tydonafhanklike beheervergelykings getransformeer word na tydafhanklike hulpvergelykings deur die invoering van 'n kunsmatige toestandsvergelyking. Die oplossing van die hulpvergelykings konvergeer na 'n stasionêre oplossing, wat ooreenstem met die oplossing van die oorspronklike tydonafhanklike beheervergelykings. Die gedrag van die vloeier, wanneer ten volle ontwikkelde laminêre vloeiing bereik word, is met sukses bereken. 'n Eenvoudige model vir die bepaling van ontwikkeling van vloeiing langs die annulus vir enige gegewe invloeiingsprofiel word voorgestel. Die berekende resultate stem ooreen met die resultate wat uit die fisika van die probleem verwag word.

ABSTRACT

The computation of flow in a rotating annulus by the method of artificial compressibility

The flow of an incompressible viscous fluid is studied via the numerical solution of the discretised continuity and Navier-Stokes governing equations. In particular flow in an annulus formed by two coaxial cylinders, each of which may rotate with respect to the other, and where a pressure drop is prescribed over the lengths of the cylinders, is considered. As method of solution Chorin's method of artificial compressibility is applied in which the time-independent governing equations are transformed into time-dependent auxiliary equations via the introduction of an artificial equation of state. The solution of the auxiliary equations converges to a stationary solution which corresponds to the solution of the original time-independent equations. The behaviour of the fluid, once fully developed laminar flow is reached, is successfully computed. A simple model is also proposed by which the development of flow along the annulus may be computed for any given inflow velocity profile. The computed results are in agreement with what one would expect from the physics of the problem.

1. INLEIDING

Probleme in die vloedinamika word hoofsaaklik numeries opgelos, aangesien die beheervergelykings wat vloeiing beskryf, hoogs nie-lineêre, parsieël differensiaalvergelykings is, wat in die meeste praktiese gevalle slegs numeries oplosbaar is. As gevolg hiervan geniet die ontwikkeling en toepassing van numeriese oplossingstegnieke vir sulke probleme heelwat aandag.¹ Die koms van die hoëspoedrekenaar het berekenings aansienlik versnel en saam met die ontwikkeling van die tegnologie, het die numeriese metodes ook al hoe meer gesofistikeerd geraak. Dit is dus van kardinale belang dat dié metodes beheers moet word en in besonder dat kennis geneem word van die metodes wat wel praktiese toepassing het.

Probleme waarby onsaamdrukbare vloeiers betrokke is, kan op verskeie maniere geformuleer word. Hierdie formulerings sluit onder andere in die formulering in terme van die primitiewe veranderlikes; dit is die snelheid en die druk, asook die indirekter stroomfunksie-vortisiteitsformulering.² Dit is interessant om daarop te let dat daar in die algemeen aan die stroomfunksie-vortisiteitsformulering voorkeur gegee word.

Intuïtief sou 'n mens verkies om in terme van die primitiewe veranderlikes te werk. Dit is nie net heel-

wat eenvoudiger nie, maar die onbekendes, dit is die snelheid en die druk, word direk bereken. Die uitbreiding van probleme in twee dimensies na drie dimensies, lewer in die geval van primitiewe veranderlikes ook die minste komplikasies.²

Die doel van hierdie studie is gevolglik tweërlei. Eerstens die bestudering van Chorin se metode van kunsmatige saamdrukbaarheid⁸ waarin daar met primitiewe veranderlikes, eerder as in terme van stroomfunksies en vortisiteit, gewerk word. Aangesien daar in die literatuur op verskeie plekke na hierdie metode verwys word, maar daar relatief min toepassings daarvan op werklike nie-triviale praktiese probleme bestaan, is die tweede doel die toepassing van Chorin se metode op 'n ingenieursverwante probleem van potensieel praktiese belang.

2. DIE ANNULUSPROBLEEM

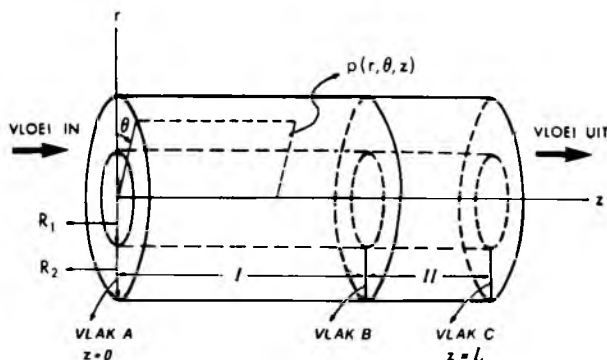
In hierdie studie ondersoek ons die gedrag van 'n onsaamdrukbare, viskeuse Newtonvloeier in 'n annulus, waarvan een van die twee silinders ten opsigte van die ander roteer. Hierdie probleem vra ons aandag, aangesien dit verteenwoordigend is van die vloeiing wat in verskeie ingenieursvelde van belang is, byvoorbeeld by elektriese motors,³ hitte-uitruilers³ en

by die smering van die bewegende dele in meganiese apparaat.⁴

Die fisiese probleem kan soos volg beskryf word:

'n Lang annulus (fig. 1) bestaande uit twee aksiaal-simmetriese silinders word in 'n vloeier geplaas. Die binneste silinder is solied en enige een van die silinders roteer ten opsigte van die ander. Vloeiing is radiaal weg vanaf die silindervlakke en vanweë die 'nie-gly'-voorwaarde wat op albei hierdie kontakvlakke geld, word die vloeier by die wande vertraag. 'n Konstante deurvloei word verseker deurdat die vloeier na die sentraalvlak van die annulus beweeg, waar dit relatief versnel en uiteindelik volledig ontwikkelde laminêre vloeiing bereik. Gepaste randvoorwaardes word op die vlakke A, B en C (fig. 1) voorgeskryf, sowel as 'n drukval oor die lengte-interval BC. In die besonder is dit dan van belang om te bepaal

- (1) hoe ontwikkeling van vloeiing langs die annulus plaasvind – dit is oor die gebied I en
- (2) die toestand van die vloeier wanneer volledig ontwikkelde laminêre vloeiing bereik word – dit is oor gebied II.



FIGUUR 1: Die meetkunde van die annulusprobleem. Die posisie van enige punt in die annulus kan in terme van silindriese koördinate (z, r, θ) gespesifiseer word.

4. DIE BEHEERVERGELYKINGS

Die beheervergelykings wat die vloeiing van 'n algemene vloeier beskryf, bestaan uit die sogenaamde kontinuïteitsvergelyking en 'n stel vergelykings wat as die Navier-Stokesvergelykings bekend staan. Die kontinuïteitsvergelyking is 'n direkte gevolg van die toepassing van die wet van behoud van massa en die tweede stel vergelykings verteenwoordig in werklikheid die bewegingsvergelykings van die vloeier. Laasgenoemde spruit uit die toepassing van Newton se bewegingswette om die beweging van die vloeierpartikels te beskryf. Volledige teoretiese afleidings van hierdie beheervergelykings kan in verskeie gesaghebbende naslaanwerke^{3,5} gevind word.

Die kontinuïteitsvergelyking vir 'n onsaamdruk-bare Newtonvloeier word gegee deur

$$\text{div } \bar{V} = 0 \quad (4.1)$$

en die Navier-Stokesvergelykings vir konstante viskosititeit en digtheid in kartesiese koördinate deur

$$\begin{aligned} \rho \frac{DV_x}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \text{divgrad } V_x + \rho(\bar{f}_B)_x \\ \rho \frac{DV_y}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \text{divgrad } V_y + \rho(\bar{f}_B)_y \\ \rho \frac{DV_z}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \text{divgrad } V_z + \rho(\bar{f}_B)_z \end{aligned} \quad (4.2)$$

waar ρ die digtheid,
 p die druk,
 μ die viskosititeit en
 \bar{f}_B 'n liggaamskrag is.

$\frac{D}{Dt}$ is die materiële afgeleide en word gegee deur

$$\frac{D}{Dt} = V_x \frac{\partial}{\partial x} + V_y \frac{\partial}{\partial y} + V_z \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t}$$

5. DIE METODE VAN KUNSMATIGE SAAMDrukBAARHEID

Die metode van kunsmatige saamdrukbaarheid is deur onafhanklike studies van Vladimirova et al. (1965)⁶ en Chorin (1967)⁷ ontwikkel. Die beginsel waarop hierdie metode berus, is 'n kunsmatige saamdrukbaarheid, δ , wat in die beheervergelykings ingevoer word om sodoende die berekenings te vergemaklik. Dit word op so 'n wyse gedoen dat die uiteindelijke resultate onafhanklik is van δ , maar dat δ wel 'n belangrike rol speel in die konvergensie na die oplossing. Dié metode, soos deur Chorin⁸ beskryf, word in hierdie studie toegepas.

Vir eenvoud beskryf ons die metode aan die hand van die volgende twee-dimensionele formulering van die beheervergelykings:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right) + f_1 \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right) + f_2 \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= 0 \end{aligned}$$

Dit kan in 'n meer ekonomiese vorm geskryf word as

$$\begin{aligned} \partial_t u_i + u_j \partial_j u_i &= -\frac{1}{\rho} \partial_i p + \nu \Delta u_i + f_i \\ \partial_j u_j &= 0; \quad i, j = 1, 2 \end{aligned} \quad (5.1)$$

waar u_i ; $i=1,2$ die snelheidskomponente in die onderskeie- x_1 en x_2 koördinaatrigtings,

$\nu = \frac{\mu}{\rho}$ die kinematiese viskosititeit,

t die tyd en

f_i die komponente van die eksterne krag per eenheidsmassa is.

$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$; $i=1,2$ verteenwoordig die partiële afgeleides in die ruimte en

$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$ die partiële afgeleide met betrekking tot die tyd. Verder is

$\Delta \equiv \sum_j \partial_j^2$, sodat die vergelyking wat ooreenstem met $i=1$ in (5.1) gegee word deur:

$$\partial_t u_1 + u_1 \partial_1 u_1 + u_2 \partial_2 u_1 = -\frac{1}{\rho} \partial_1 p + \nu \Delta u_1 + f_1.$$

Die vergelyking in stelsel (5.1) kan in dimensielose vorm geskryf word deur 'n karakteristieke lengte, d , en 'n karakteristieke snelheid, U , in te voer. Stel nou die identiteite

$$u_i' = \frac{u_i}{U}; \quad x_i' = \frac{x_i}{U}; \quad p' = \left(\frac{d}{\rho \nu U}\right)p; \quad F_i' = \frac{\nu U}{d^2} f_i \text{ en}$$

$$t' = \left(\frac{\nu}{d^2}\right)t$$

in (5.1) en laat gerieflikerwys die aksente weg. Die dimensielose vorm van stelsel (5.1) lyk dan soos volg:

$$\begin{aligned} \partial_t u_i + R u_j \partial_j u_i &= -\partial_i p + \Delta u_i + F_i \\ \partial_j u_j &= 0; \quad (i, j = 1, 2) \end{aligned} \quad (5.2)$$

waar $R = \frac{Ud}{\nu}$ die Reynoldsgetal verteenwoordig.

Die tyd-onafhanklike beheervergelykings wat ooreenstem met stasionêre vloeiing, kan direk uit (5.2) verkry word, naamlik

$$\begin{aligned} R u_j \partial_j u_i &= -\partial_i p + \Delta u_i + F_i \\ \partial_j u_j &= 0; \quad (i, j = 1, 2) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Hierdie stelsel vergelykings word egter nie direk numeries opgelos nie, maar wel 'n stelsel tydafhanklike hulpvergelykings. Die uitgangspunt is hier dat die oplossing van die hulpvergelykings, indien konvergensie na 'n stasionêre oplossing verkry word, ook die oplossing van stelsel (5.3) sal wees.

Konstruksie van die hulpvergelykings geskied deur 'n kunsmatige toestandsvergelyking

$$p = \frac{\rho}{\delta}$$

waar ρ 'n kunsmatige digtheid en δ 'n kunsmatige saamdrukbaarheid voorstel, in die tydafhanklike beheervergelykings soos gegee deur stelsel (5.2), in te voer. Die drukterme in (5.2), naamlik

$$-\partial_i p; \quad i=1, 2,$$

word vervang deur

$$-\frac{1}{\delta} \partial_i \rho; \quad i=1, 2$$

en die kontinuïteitsvergelyking, (5.2), word geskryf as

$$\partial_t \rho + \partial_j u_j = 0; \quad i=1, 2.$$

'n Gewysigde stelsel beheervergelykings, naamlik

$$\begin{aligned} \partial_t u_i + R u_j \partial_j u_i &= -\frac{1}{\delta} \partial_i \rho + \Delta u_i + F_i \\ \partial_t \rho + \partial_j u_j &= 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

(i, j = 1, 2)

word sodoende verkry. Die tyd t wat hier ter sprake is, het egter geen fisiese betekenis nie en gevolglik word hierdie metode ook soms 'n pseudo-onbesten-

dige metode genoem. Dit is belangrik om daarop te let dat vergelyking (5.4) eers ná bereiking van die stasionêre toestand, $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, die begrensing $\partial_j u_j = 0$ bevredig en voor daardie tyd geen fisiese betekenis het nie. Indien die oplossing van stelsel (5.4) konvergeer na 'n stasionêre oplossing, dit wil sê 'n oplossing wat onafhanklik is van t , dan is hierdie oplossing ook die oplossing tot die stasionêre probleem waarvan (5.3) die beheervergelykings is. Hierdie genoemde stasionêre oplossing van stelsel (5.4) sal dan onafhanklik wees van δ .

Volgens Chorin⁹ kan ons aanvaar dat die numeriese oplossing van stelsel (5.4) in die algemeen wêl sal konvergeer.

Die metode van kunsmatige saamdrukbaarheid behels nou die benadering van stelsel (5.4) deur 'n eindige-verskilskema en die numeriese oplossing daarvan deur 'n standaard-numeriese metode. Hierdie benadering moet egter aan 'n paar vereistes voldoen, naamlik

- die skema moet stabiel wees,
- die oplossing van die verskilvergelykings moet konvergeer na 'n gestadige (bestendige) limiet,
- die waarde van δ en enige ander parameter in die verskilvergelykings moet só gekies word dat die limiet so vinnig as moontlik bereik word en die prosedure steeds ekonomies is en
- die bestendige limiet van die verskilbenadering moet neig na 'n bestendige oplossing van (5.1), as die afstand tussen opeenvolgende roosterpunte na nul strewe.

Volgens Chorin is dit moeilik om die voorwaardes vir bogenoemde vereistes analities te bepaal en moet dit in die praktyk deur middel van numeriese eksperimentering gedoen word.

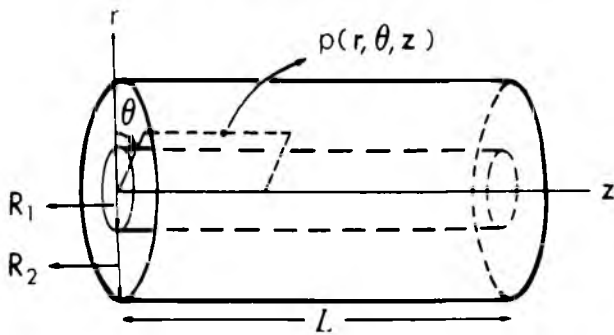
6. DIE VERSKILVERGELYKINGS VIR DIE ANNULUSPROBLEEM

Vir silindriese koördinate (fig. 2) wat van toepassing is by die annulusprobleem, word die Navier-Stokes-vergelykings in afwesigheid van liggaamskragte, volgens Slattery⁵ gegee deur

$$\begin{aligned} V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_r}{\partial t} - \frac{V_\theta^2}{r} \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} \right. \\ \left. - \frac{V_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right) \\ V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} + \frac{\partial V_\theta}{\partial t} + \frac{V_\theta V_r}{r} \\ = -\frac{1}{r\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} \right. \\ \left. - \frac{V_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \\ V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial t} \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} \right) \end{aligned} \quad (6.1)$$

en die kontinuïteitsvergelyking deur

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} = 0 \quad (6.2)$$



FIGUUR 2: Die meetkunde van die annulus met bineradius \$R_1\$ en buiteradius \$R_2\$.

'n Dimensielose vorm van hierdie stelsel word verkry deur die identiteite

$$V_r^i = \frac{V_r}{V_0}; V_\theta^i = \frac{V_\theta}{V_0}; V_z^i = \frac{V_z}{V_0};$$

$$r^i = \frac{r}{R_2}; \theta^i = \theta; z^i = \frac{z}{R_2};$$

$$p^i = \frac{R_2}{\rho \nu V_0} p \text{ en } t^i = \frac{\nu}{R_2^2} t$$

met \$V_0\$ die gemiddelde invoersnelheid,
\$R_2\$ die buiteradius van die annulus

en \$\nu = \frac{\mu}{\rho}\$ die kinematiese viskositeit, daarin te verwag. Aangesien die annulus aksiaalsimmetries is (fig. 2), val die afgeleides met betrekking tot \$\theta\$ weg en kan vloeiing in 'n lengtesegment (fig. 3) van die annulus as verteenwoordigend van die vloeiing as geheel beskou word. Om die notasie te vereenvoudig word die aksente in die getransformeerde stelsel nou weggelaat.

Die invoering van 'n kunsmatige toestandsverge-lyking met \$p = \frac{\rho}{\delta}\$ reduceer stelsel (6.1) en (6.2) volgens die metode van kunsmatige saamdrukbaarheid tot 'n stelsel gewysigde beheervergelykings, naamlik

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V_r}{\partial t} + R (V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\theta^2}{r}) \\ &= -\frac{1}{\delta} \frac{\partial \rho}{\partial r} + (\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} - \frac{V_r}{r^2}) \\ & \frac{\partial V_\theta}{\partial t} + R (V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} + \frac{V_\theta V_r}{r}) \\ &= (\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2} - \frac{V_\theta}{r^2}) \\ & \frac{\partial V_z}{\partial t} + R (V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z}) \\ &= -\frac{1}{\delta} \frac{\partial \rho}{\partial z} + (\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}) \\ & \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r}) = 0 \end{aligned} \quad (6.3)$$

waar \$R\$ die Reynoldsgetal en \$\delta\$ die kunsmatige saamdrukbaarheid is. Hierdie stelsel word nou gediskreteiseer. Die traagheids- en drukterme word deur sentrale verskille benader, terwyl die viskeuse dissipasie-terme volgens Dufort-Frankel se patroon⁹ gediskreteiseer word.

Die numeriese berekende benaderings tot \$V_r\$, \$V_\theta\$, \$V_z\$ en \$\rho\$, word verkry deur die eindige-verskilbenadering tot stelsel (6.3) iteratief op te los. Hierdie stelsel is eksplisiet en met verwysing na fig. 4 kan dit vir berekeningsdoeleindes geskryf word as

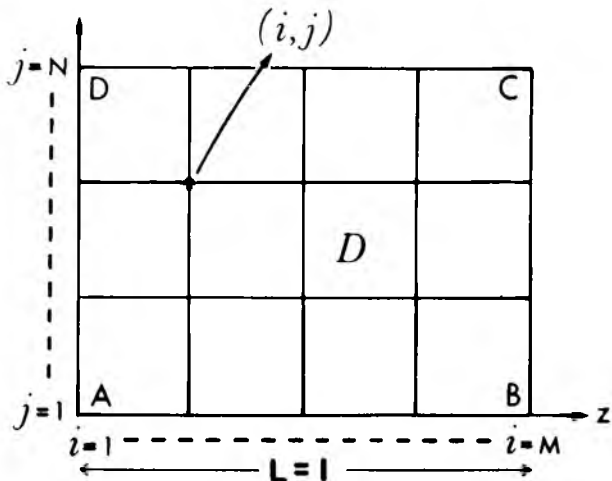
$$\begin{aligned} & \rho^{n+1}(i, j) \\ &= -\frac{\Delta t}{\Delta z} [V_z^n(i+1, j) - V_z^n(i-1, j)] - \frac{\Delta t}{\Delta r} [V_r^n(i, j+1) \\ & \quad - V_r^n(i, j-1)] - V_r^n(i, j)/r + \rho^{n-1}(i, j) \end{aligned} \quad \begin{aligned} & (i = 2, \dots, M-1) \\ & (j = 2, \dots, N-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & V_r^{n+1}(i, j) \\ &= [-R \frac{\Delta t}{\Delta z} (V_z^n(i+1, j)V_r^n(i+1, j) - V_z^n(i-1, j)V_r^n(i-1, j)) \\ & \quad - R \frac{\Delta t}{\Delta r} ((V_r^n(i, j+1))^2 - (V_r^n(i, j-1))^2) + R (V_\theta^n(i, j))^2/r \\ & \quad + \frac{\Delta t}{\Delta r} \frac{1}{r} (V_r^n(i, j+1) - V_r^n(i, j-1)) - V_r^n(i, j)/r^2 \\ & \quad + \frac{2\Delta t}{(\Delta z)^2} (V_r^n(i+1, j) + V_r^n(i-1, j) - V_r^{n-1}(i, j)) \\ & \quad + \frac{2\Delta t}{(\Delta r)^2} (V_r^n(i, j+1) + V_r^n(i, j-1) - V_r^{n-1}(i, j)) \\ & \quad - \frac{1}{\delta} \frac{\Delta t}{\Delta r} (\rho^n(i, j+1) - \rho^n(i, j-1)) + V_r^{n-1}(i, j)] / \\ & \quad [1 + \frac{2\Delta t}{(\Delta r)^2} + \frac{2\Delta t}{(\Delta z)^2}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & V_\theta^{n+1}(i, j) \\ &= [-R \frac{\Delta t}{\Delta z} (V_z^n(i+1, j)V_\theta^n(i+1, j) - V_z^n(i-1, j)V_\theta^n(i-1, j)) \\ & \quad - R \frac{\Delta t}{\Delta r} (V_r^n(i, j+1)V_\theta^n(i, j+1) - V_r^n(i, j-1)V_\theta^n(i, j-1)) \\ & \quad - R (V_\theta^n(i, j)V_r^n(i, j))/r + \frac{\Delta t}{\Delta r} \frac{1}{r} (V_\theta^n(i, j+1) - V_\theta^n(i, j-1)) \\ & \quad - V_\theta^n(i, j)/r^2 + \frac{2\Delta t}{(\Delta z)^2} (V_\theta^n(i+1, j) + V_\theta^n(i-1, j) - V_\theta^{n-1}(i, j)) \\ & \quad + \frac{2\Delta t}{(\Delta r)^2} (V_\theta^n(i, j+1) + V_\theta^n(i, j-1) - V_\theta^{n-1}(i, j)) \\ & \quad + V_\theta^{n-1}(i, j)] / [1 + \frac{2\Delta t}{(\Delta r)^2} + \frac{2\Delta t}{(\Delta z)^2}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & V_z^{n+1}(i, j) \\ &= [-R \frac{\Delta t}{\Delta z} ((V_z^n(i+1, j))^2 - (V_z^n(i-1, j))^2) \\ & \quad - R \frac{\Delta t}{\Delta r} (V_z^n(i, j+1)V_r^n(i, j+1) - V_z^n(i, j-1)V_r^n(i, j-1)) \\ & \quad + \frac{2\Delta t}{(\Delta z)^2} (V_z^n(i+1, j) + V_z^n(i-1, j) - V_z^{n-1}(i, j)) \\ & \quad + \frac{2\Delta t}{(\Delta r)^2} (V_z^n(i, j+1) + V_z^n(i, j-1) - V_z^{n-1}(i, j)) \\ & \quad + \frac{\Delta t}{\Delta r} \frac{1}{r} (V_z^n(i, j+1) - V_z^n(i, j-1)) + V_z^{n-1}(i, j) \\ & \quad - \frac{\Delta t}{\Delta z} \frac{1}{\delta} (\rho^n(i+1, j) - \rho^n(i-1, j))] / [1 + \frac{2\Delta t}{(\Delta r)^2} + \frac{2\Delta t}{(\Delta z)^2}] \end{aligned} \quad (6.4)$$

Dié vergelykings bevat tweede-orde-benaderings tot die afgeleides in stelsel (6.3) en het gevolglik afknottingsfoute van $O(\Delta t^2)$, $O(\Delta z^2)$ en $O(\Delta r^2)$ onderskeidelik in hierdie afgeleides.



FIGUUR 3: Die eindige-verskilrooster.

In bostaande eksplisiete stelsel is dit duidelik dat daar in die berekening van $V_k^{n+1}(i,j); k=r,\theta,z$, vir 'n spesifieke k , nie van die waarde van $u_k^n(i,j)$ gebruik gemaak word nie. Gevolglik het ons effektiewelik twee ooreenstemmende roosters wat geen gemeenskaplike roosterpunte bevat nie. Die waardes van $V_k^{n+1}(i,j)$ en $\rho^{n+1}(i,j)$ word dan bereken deur eers (stap 1) die waardes van $V_k^n(i,j); k=r,\theta,z$ en $\rho^n(i,j)$ in die een rooster te bereken en dan (stap 2) hierdie nuwe waardes te gebruik om $V_k^{n+2}(i,j); k=r,\theta,z$ en $\rho^{n+2}(i,j)$ in die tweede rooster te bereken. Hierna laat ons die tydvlakke $n+1$ en $n+2$ saamval as vlak $n+1$, sodat die ooreenstemmende roosters ook saamval en ons 'n berekende oplossing by elke punt van die rooster verkry.

Aangesien daar geen randvoorwaardes vir die druk voorgeskryf is nie, moet die kontinuïteitsvergelyking ook op die rand van D (fig. 3) toegepas word. In die eindige-verskil-benaderings op die rande word, vir eenvoud, voorwaartse of terugwaartse verskille vir afgeleides loodreg op die rande gebruik. Eerste-orde voorwaartse of terugwaartse verskille is ook hoofsaaklik gebruik waar randvoorwaardes wat eerste afgeleides bevat, eksplisiet voorgeskryf is.

7. NUMERIESE RESULTATE

7.1 Volledig ontwikkelde vloeiing

Ons stel hier belang in die gedrag van 'n vloeier in 'n annulus waarvoor daar 'n drukval oor die lengte van die silinder, dit is die lengte-interval AB in fig. 3, voorgeskryf is.

In die besonder word 'n toestand van volledig ontwikkelde of gestadigde vloeiing gerealiseer wanneer 'n terminale snelheid by elke punt in D bereik word. Die komponente van die snelheid op die invloei- en uitvloeivlakke wat ooreenstem met AD en BC in fig. 3 word bereken deur die toepaslike randvoorwaardes in te voer en dan die behorende verskilvergelykings daarvolgens aan te pas en op te los.

In die geval van volledig ontwikkelde vloeiing, is die versnelling in die z-rigting (fig. 3) nul en sal

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} = 0; s=r,\theta,z \tag{7.1}$$

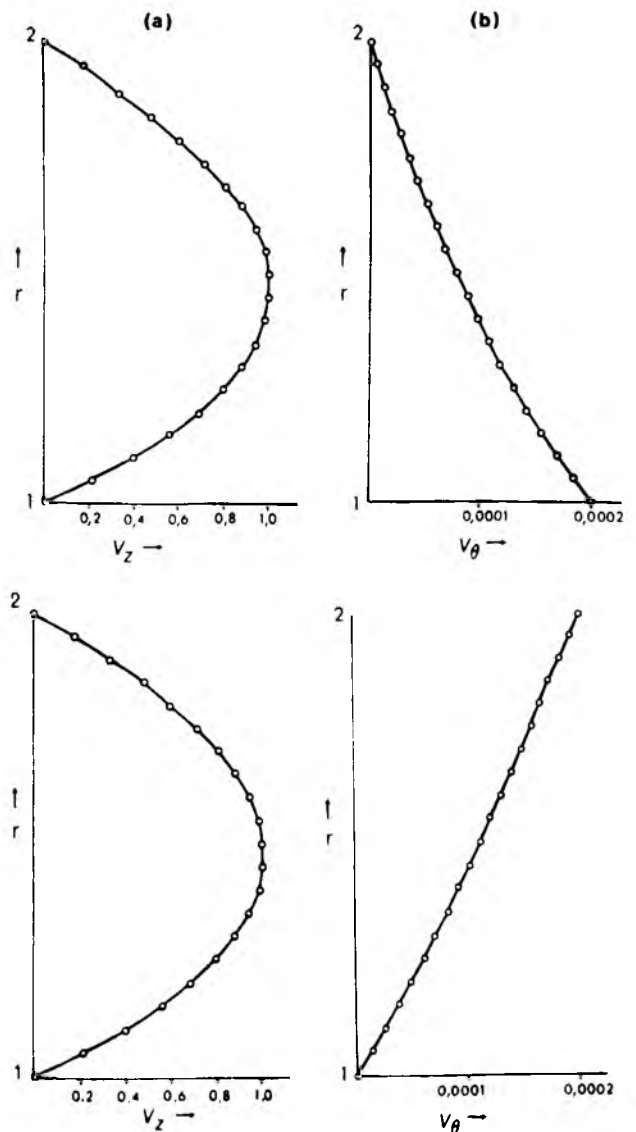
'n randvoorwaarde op beide die invloei- en uitvloeivlakke van D wees.

Die toepaslike randvoorwaardes vir hierdie probleem word dus soos volg gekies

$$\begin{aligned} V_z = V_r = 0; V_\theta = 0(i) \text{ of } V_\theta = \omega R_1(ii) \text{ op DC} \\ V_z = V_r = 0; V_\theta = \omega R_2(i) \text{ of } V_\theta = 0(ii) \text{ op AB} \\ p = 4,0; \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0, s=r,\theta,z \text{ op AD en} \\ p = -4,0; \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0, s=r,\theta,z \text{ op CB,} \end{aligned} \tag{7.2}$$

waar ω die hoeksnelheid en $R_i, i=1,2$ die straal van die roterende silinder voorstel. Wanneer die buitenste silinder roteer, sal (ii) geld en wanneer die binneste silinder roteer sal (i) geld. In hierdie studie is die buitestraal $R_2=2,0$; die binnestraal $R_1=1,0$; $\omega=0,0001 \text{ s}^{-1}$ en die ander parameters soos volg:

$$\Delta t = 0,0005366; \delta = 0,00032; R = 1,0 \text{ en } \Delta z = \Delta r = 0,05; \text{ met } N=M=21.$$



FIGUUR 4: (i) Die binnesilinder roteer. (ii) Die buitesilinder roteer.

Die resultate in beide gevalle (i) en (ii) word in fig. 4 geskets. Alhoewel die V_z snelheidsprofiel skynbaar simmetries voorkom, toon 'n meer akkurate analise van die resultate dat die verwagte asimmetrie tog teenwoordig is. Die relatiewe verskil

$$(V_z(1,25) - V_z(1,75))/V_z(1,25) = 12,9\%$$

is die gevolg van die invloed wat die verskil in kontakoppervlakke tussen die binneste en buitenste silinders op die momentumoordrag het. Die berekende drukval oor die lengte van die annulus is lineêr. Die resultate is geheel en al in ooreenstemming met wat ons uit die fisika van die probleem sou verwag. Vertrou in die korrektheid van die berekeningsprosedure is verder versterk deur die berekende V_θ waardes te vergelyk met twee gevalle waar analitiese oplossings vir V_θ wel bekend is. In die eerste geval, met die buitenste silinder wat roteer en R_1 en R_2 beide baie groot sodat $R_1/R_2 \approx 1$, is dit bekend⁹ dat V_θ lineêr met r varieer. In die tweede geval met die binneste silinder wat roteer, is 'n analitiese oplossing vir V_θ ook bekend⁹ en is berekeninge deurgevoer vir die geval $R_1:R_2$ in die verhouding 0,05:1,05. In beide gevalle het die berekende waardes binne 1% ooreengestem met die analitiese oplossings.

7.2 Ontwikkeling van vloeiing langs die annulus

Die ingewikkelder verskynsel van die ontwikkeling van vloeiing langs die annulus word nou ondersoek. Ons stel in die besonder belang in die geval waar die aksiale snelheid by die intreevlak laminêr en uniform is, terwyl die aanvanklike radiale en rotasie-snelheid nul is. Dit is dan van belang om te bereken hoe die vloeiing langs die annulus ontwikkel totdat volledig ontwikkelde vloeiing by die uittreevlak bereik word.

'n Eerste benadering tot die oplossing van hierdie probleem word bereken deur 'n transisielagie op die linkerrand van D (fig. 3) in te voer. Sodoende word die oorgang van vry vloeiing buite die annulus na vloeiing in die annulus gekonstrueer. Hierdie transisielagie verteenwoordig punte buite die annulus en stem ooreen met die roosterpunte waar $i=1$ en $i=2$. Rotasie is afwesig en 'n drukval wat ooreenstem met die probleem in afdeling 7.1 word hier voorgeskryf. Verder word die oplossingsgebied vergroot om te verseker dat volledig ontwikkelde vloeiing wel bereik word. Ons kies hier $N=21$ en $M=81$ met Δr en Δz dieselfde as vantevore.

As gevolg van die 'nie-gly'-voorwaarde wat op AB en DC (fig. 3) geld, het die aksiale snelheid, V_z , by die hoekpunte A en D 'n waarde van nul. As 'n eerste en ietwat rowwe benadering tot 'n uniforme intree-aksiale-snelheidsverdeling met hierdie bykomende 'nie-gly'-begrensing, kies ons by die invloeivlak die aksiale snelheid as

$$V_{z0}(r, a) = a(1 - 16(1,5 - r)^4),$$

waar a 'n konstante is wat bepaal moet word, sodat die intreevloed gelyk aan die gestadigde uittreevloed is – vir die besondere meetkunde wat ons hier beskou is $a=0,83557$.

Die toepaslike randvoorwaardes is

$$\left. \begin{aligned} V_z &= V_{z0}(r, a) \\ V_r &= V_\theta = 0 \\ p &= 4,0 \end{aligned} \right\} \text{op AD}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V_s}{\partial z} &= 0; s=r, \theta \\ V_z &= V_{zL}(r) \end{aligned} \right\} \text{op BC}$$

$$\left. \begin{aligned} V_z &= V_r = 0 \\ V_\theta &= \omega R_2 \end{aligned} \right\} \text{op DC}$$

$$\text{en } V_r = V_\theta = V_z = 0 \text{ op AB} \quad (7.3)$$

met $V_{z0}(r, a) = 0,8355689(1 - 16(1,5 - r)^4)$; $1 \leq r \leq 2$, $V_{zL}(r)$ die berekende aksiale snelheid vir gestadigde vloeiing, $\omega = 0,0001 \text{ s}^{-1}$ en $R_2 = 2,0$.

Die transisielagie lyk soos volg:

$$\left. \begin{aligned} \rho(1, j) &= 0,00128 \\ V_z(1, j) &= V_{z0}(r, a) \\ V_r(1, j) &= V_\theta(1, j) = 0 \end{aligned} \right\}$$

en

$$\left. \begin{aligned} \rho(2, j) &= 0,00128 - \frac{\partial \rho}{\partial z} \Delta z = 0,001152 \\ V_\theta(2, 21) &= 0 \end{aligned} \right\} (7.4)$$

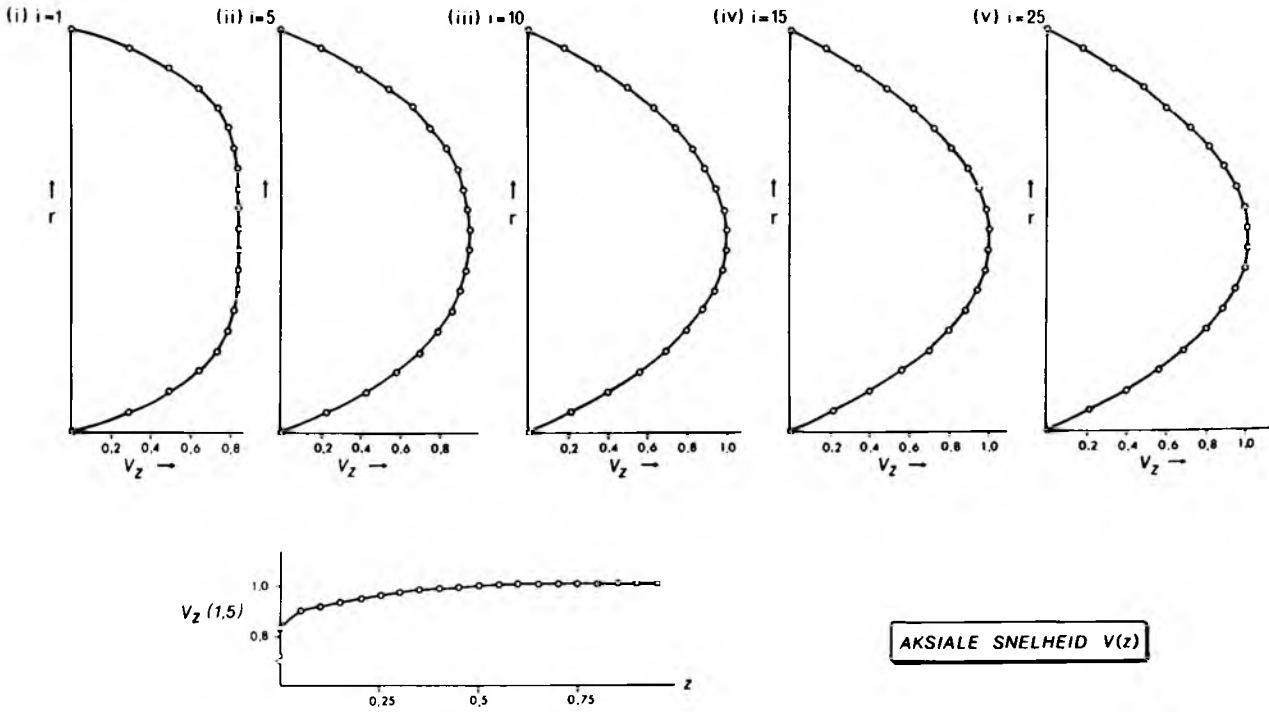
waar (i, j) ; $i=1,2$ verwys na die roosterpunte in figuur 3.

Die beherende verskilvergelykings (vergs. (6.4)) word nou iteratief, onderhewig aan bostaande randvoorwaardes, opgelos.

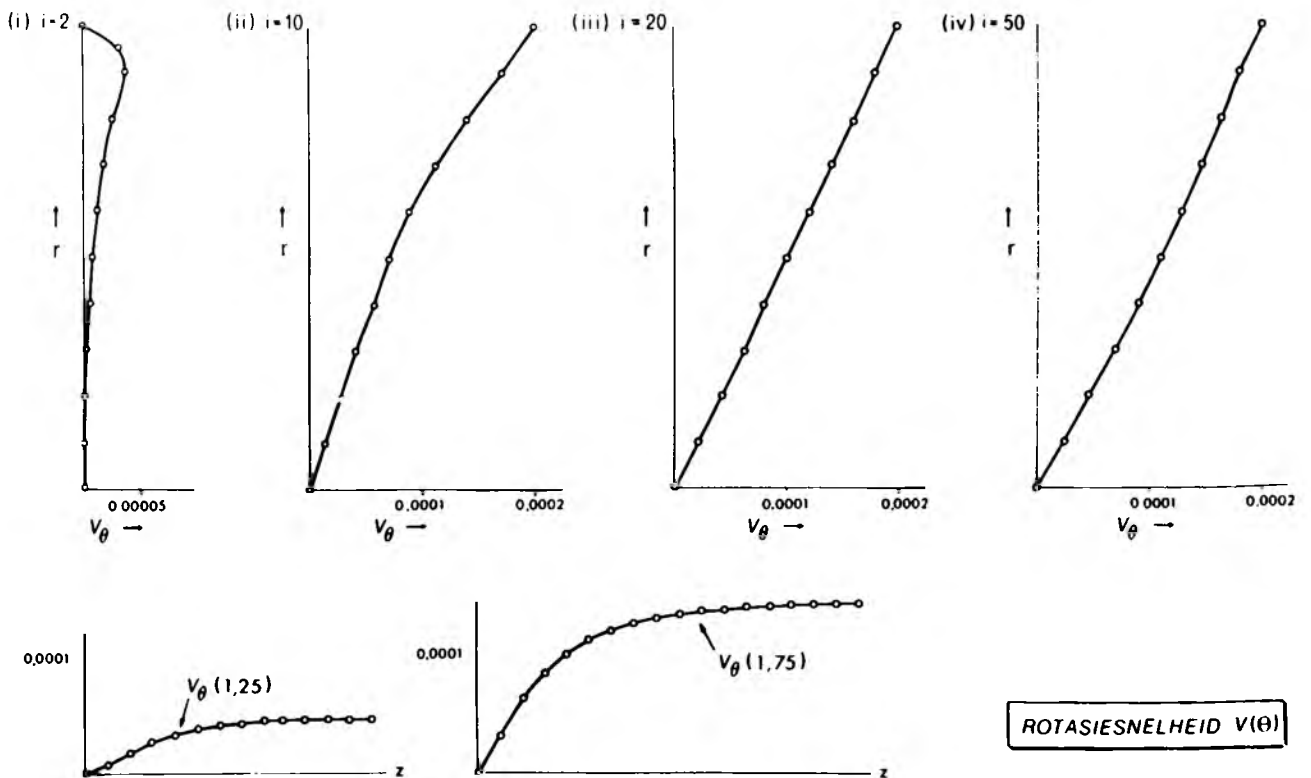
Grafiese voorstellings van die berekende snelheidsprofiel word in figure 5 tot 7 aangetoon. Snitte van die oplossingsgebied wat verteenwoordigend van die ontwikkeling is, is vir elke snelheidskomponent gekies. Fig. 5(a) toon die ontwikkeling in aksiale snelheid onder invloed van die viskeuse afskuifkragte. Die vloei patroon verander namate daar in die annulus afbeweeg word, totdat 'n profiel identies aan dié in fig. 4 verkry word. Die tempo waarteen die snelheid ontwikkel na die gestadigde toestand, word verteenwoordig in die grafiek in fig. 5(b) wat die variasie van $V_z(1,5)$ teen z weerspieël. Die ontwikkeling stabiliseer vinnig tot 'n volledig ontwikkelde, laminêre vloei patroon. Die ontwikkeling van rotasie-snelheid word in fig. 6(a) en (b) aangetoon.

Die radiale snelheidsontwikkeling is in fig. 7(a) en (b) geskets. Ons verkry hier vloeiing radiaal weg vanaf beide silindervlakke. As gevolg van die 'nie-gly'-voorwaarde wat op hierdie kontakvlakke geld, word die vloeiër by die wande vertraag. 'n Konstante deurvloed word verseker deurdat die vloeiër na die sentraalvlak van die annulus beweeg, waar dit relatief versnel om uiteindelik die gestadigde toestand aksiale snelheidsprofiel te gee. Dit is vanselfsprekend dat hierdie resultate net sinvol is indien die oplossing ten volle gekonvergeer het. Uit die grafieke in 5(b), 6(b) en 7(b) is dit duidelik dat dit wel die geval is.

Die berekende drukverloop word in fig. 8 voorgestel. As gevolg van die oorgang vanaf vrye vloeiing, is 'n nie-lineêre effek duidelik by die ingang tot die annulus – gebied (i) – sigbaar. Dit is egter duidelik dat



FIGUUR 5: Die aksiale snelheidsontwikkeling.

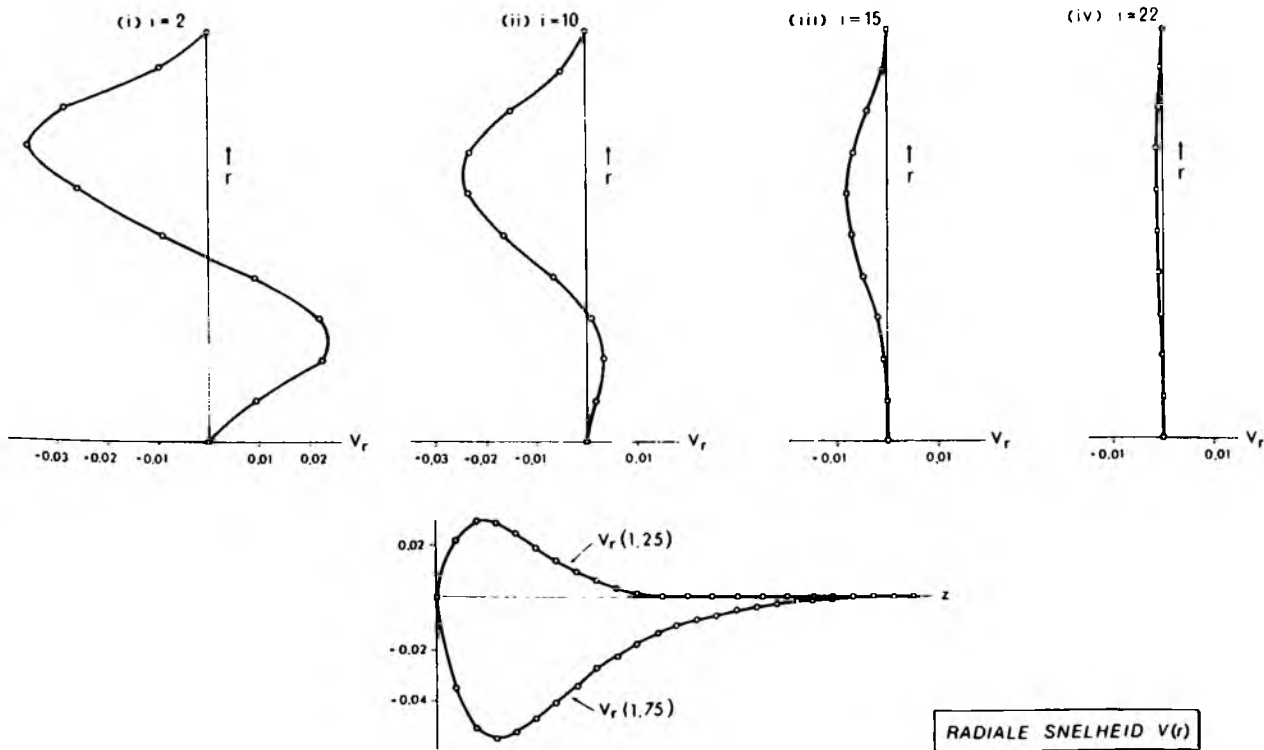


FIGUUR 6: Die ontwikkeling van die rotasiesnelheid.

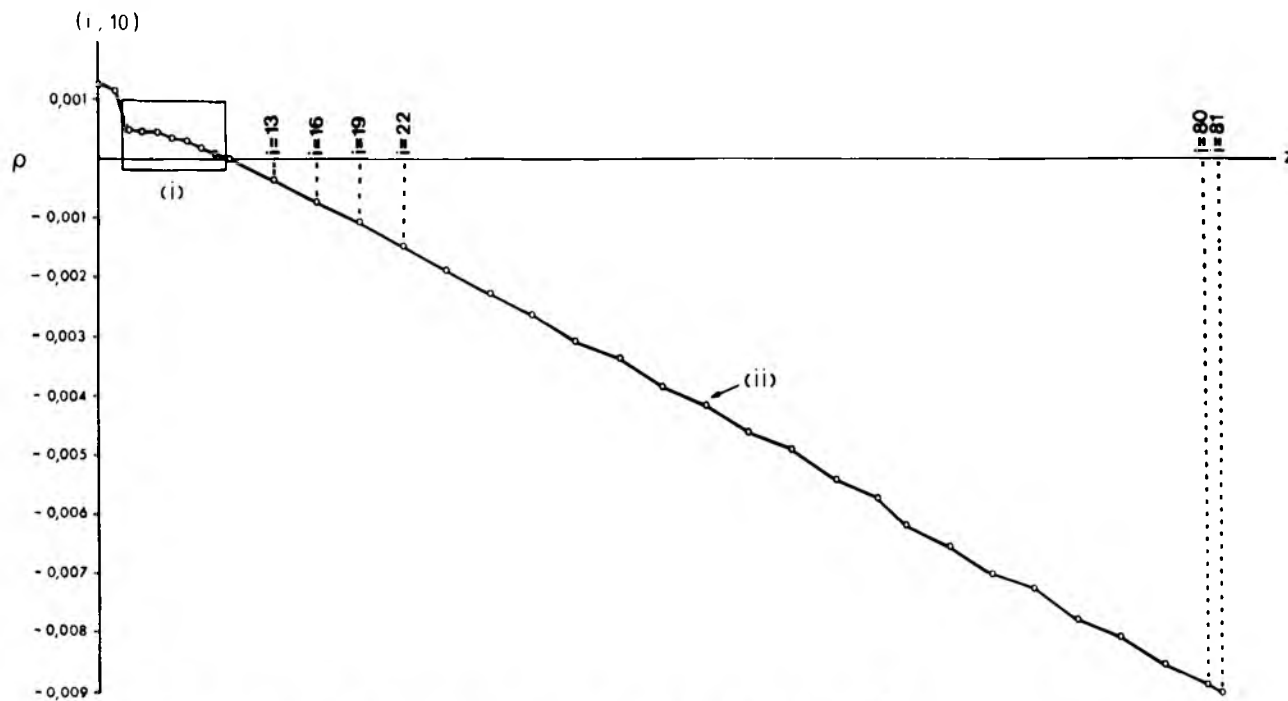
hierdie versteuringseffek vinnig uitfaseer om 'n gebied van lineêre drukval te gee en dat die verdere verloop in die aksiale rigting waarskynlik sinvol is ten spyte van die klein ossillasies wat in die berekende waardes van ρ voorkom.

8. GEVOLGTREKKINGS

Die metode van kunsmatige saamdrukbaarheid is met sukses en gemak toegepas op nie-triviale vloeiprobleme wat van potensieële praktiese belang is. Alhoewel die model wat vir ontwikkelende vloe



FIGUUR 7: Die ontwikkeling van die radiale snelheid.



FIGUUR 8: Die kunsmatige saamdrukbaarheid ρ . Druk: $p = \rho/\delta$; $\epsilon = 0,00032$.

gebruik is, besliste tekortkominge besit, is die berekende resultate geheel en al in ooreenstemming met wat uit die fisika van die probleem verwag word en is dus aanvaarbaar. Soos verwag is, het die vloeiër by die wande vertraag as gevolg van die 'nie-gly'-voorwaarde wat op beide silindervlakke geld. Radiale wegvloei vanaf die silindervlakke vind plaas met 'n gevolglike relatiewe versnelling van die vloeiër by die sentraalvlak wat verder 'n konstante deurvloei ver-

seker en uiteindelik 'n gestadigde toestand aksiale snelheidsprofiel gee.

Heelwat kan gedoen word om die model te verbeter sodat die randvoorwaardes by die invloeivlak 'n beter weerspieëling van die fisiese situasie is. 'n Meer aanvaarbare model sal waarskynlik verkry word, indien die transisielagie uitgebrei word sodat die probleem in twee dele verdeel kan word. Die een deel verteenwoordig dan vloeiing buite die annulus, ter-

wyl die ander deel vloeiing binne die annulus modelleer. Dié deel wat vloeiing buite die annulus voorstel, word dan só gekies dat die vloeiing binne die annulus 'n verwaarloosbare effek op die vloeiing aan die ekstreme linkerkant van die oplossingsgebied het. Die model kan ook verder verbeter word deur hoër orde afgeleides in die benadering van vergelykings by die rande van die oplossingsgebied te gebruik. Die roosterkeuse en/of gebruik van sentrale verskille in die diskretisering, kan ook in heroorweging geneem word. 'n Opvolgstudie waarin die model vir die beskrywing van die ontwikkeling van vloeiing langs die annulus verbeter word, word in die vooruitsig gestel.

Ontvang 4 Sept. 1986; aanvaar 14 Okt. 1986.

VERWYSINGS

1. Holt, M. (1977). Numerical Methods in Fluid Dynamics, (Springer-Verlag, New York).
2. Roache, P.J. (1976). Computational Fluid Dynamics, (Albuquerque, New Mexico).
3. Allen, T. & Ditsworth, R.L. (1972). Fluid Mechanics, (McGraw-Hill Inc.).
4. Batchelor, G.K. (1974). An Introduction to Fluid Dynamics, Cambridge University Press.
5. Slattery, J.C. (1972). Momentum, Energy and Mass Transfer in Continua, (McGraw-Hill Inc., U.S.A.).
6. Yanenko, N.N. (1971). The Method of Fractional Steps, (Springer-Verlag, New York).
7. Chorin, A.J. (1966). Numerical Study of Thermocal Convection in a Fluid Layer Heated from Below, AEC Research and Development Report, Courant Institute, NYO-1480-61 C.I.
8. Chorin A.J. (1967). A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems, *Journal of Computational Physics*, 2.
9. Ames, W.F. (1977). Numerical Methods for Partial Differential Equations, (Academic Press Inc., New York).