Navorsingsbriewe

Die uniekheid van 'n waardefunksie vir asimmetriese isotoopskeiding

UITTREKSEL

Waardefunksies vir isotoopskeiding word byvoorbeeld gebruik om die skeidingsvermoë van 'n uraanverrykingskaskade te bereken. Die uniekheid van die waardefunksie vir simmetriese skeidingsprosesse is bekend. Die uniekheidsprobleem vir asimmetriese prosesse word bespreek en opgelos.

ABSTRACT

The uniqueness of a value function for asymmetric isotope separation

Value functions for isotope separation can be used to calculate the separative power of uranium enrichment cascades. The uniqueness of the value function for symmetric separation processes is well known. The uniqueness problem is discussed and solved for asymmetric processes.

INLEIDING

Dit is gebruiklik om die vermoë van 'n skeidingselement of kaskade vir die skeiding van 'n binêre isotoopmengsel in terme van 'n waardefunksie V uit te druk.[2] Uit 'n wiskundige oogpunt gesien, beeld so 'n waardefunksie positiewe waardes van die massaverhouding R van die verlangde isotoop af op die reële getalle, op so 'n wyse dat die funksionaalvergelyking

$$(1-\alpha_{so})(1+\alpha_{fo}R)V(\alpha_{fo}R) + (\alpha_{fo}-1)(1+\alpha_{so}R)V(\alpha_{so}R) + (\alpha_{fo}-\alpha_{so})(1+R)V(R) = \phi(\alpha_{fo},\alpha_{so})(\alpha_{fo}-\alpha_{so})(1+R) \tag{1}$$

bevredig word.[1] Hier is α_{fo} en α_{so} konstante reële skeidingsverhoudings[3] waarvoor

$$0 < \alpha_{so} < 1 < \alpha_{fo} \tag{2}$$

en is $\phi(\alpha_{fo}, \alpha_{so})$ 'n arbitrêre nie-nul reële funksie van α_{fo} en α_{so}, onafhanklik van R. Dit is bekend dat (1) wel 'n oplossing het,[4] byvoorbeeld

$$V(R) = (A + BR)/(1 + R) + \phi(\alpha_{fo}, \alpha_{so})\,((aR - b)/(1 + R))\ln R, \tag{3}$$

waar A en B konstantes is wat uit voorgeskrewe waardes van V of sy afgeleide bepaal kan word en

$$a = \frac{\alpha_{fo} - \alpha_{so}}{\alpha_{fo}(1-\alpha_{so})\ln\alpha_{fo} - \alpha_{so}(\alpha_{fo}-1)\ln(1/\alpha_{so})},$$

$$b = \frac{\alpha_{fo} - \alpha_{so}}{(\alpha_{fo}-1)\ln(1/\alpha_{so}) - (1-\alpha_{so})\ln\alpha_{fo}}.$$

Een keuse van die funksie ϕ wat dikwels gebruik word, is

$$\phi(\alpha_{fo}, \alpha_{so}) = 1/b.$$

In die spesiale geval van simmetriese skeidingsprosesse is $\alpha_{fo}\,\alpha_{so} = 1$ en dus a = b. Vir hierdie geval tree daar vereenvoudigings in en is dit (minstens implisiet) bekend dat die waardefunksie onder sekere voorwaardes wel uniek is.[5] Hoewel verskeie belangrike isotoopskeidingsprosesse benaderd simmetries is, is die Suid-Afrikaanse proses vir uraanverryking 'n voorbeeld van 'n erg asimmetriese isotoopskeidingsproses.[3] Die doel van hierdie artikel is om die uniekheid van 'n waardefunksie vir die asimmetriese geval te ondersoek. Met uniekheid word bedoel dat 'n waardefunksie uniek bepaal word tot op die arbitrêre konstantes (byvoorbeeld A en B in die waardefunksie (3)).

DIE HOMOGENE VERGELYKING

Dit is maklik om te toon dat die nie-homogene funksionaalvergelyking (1) 'n unieke oplossing het as die ooreenkomstige homogene funksionaalvergelyking 'n unieke oplossing het. Deur gerieflikheidshalwe van die funksie F(R) = (1 + R) V(R) gebruik te maak, kan die homogene vergelyking herskryf word in die vorm

$$(1-\alpha_{so})F(\alpha_{fo}R) + (\alpha_{fo}-1)F(\alpha_{so}R) - (\alpha_{fo}-\alpha_{so})F(R) = 0. \tag{4}$$

Een oplossing van (4) is

$$F(R) = A + BR, \tag{5}$$

waar A en B konstantes is. Dat die uniekheidsprobleem vir 'n oplossing van die homogene vergelyking sinvol is, blyk daaruit dat as α_{fo} en α_{so} rasionale getalle is, vergelyking (4) minstens een ander oplossing het, naamlik

$$F(R) = D \text{ as R rasionaal is,}$$
$$= E \text{ as R irrasionaal is,}$$

waar D en E arbitrêre reële getalle is, $D \neq E$.

Ten einde uniekheid te verkry, is dit nodig om iets meer oor die eienskappe van F te spesifiseer. In wat volg, sal daar aangeneem word dat F twee maal kontinu differensieerbaar in die oop interval $(0,\infty)$ is. Daardeur word die tweede oplossing hierbo uitgeskakel en word die volgende benadering tot die uniekheidsprobleem moontlik gemaak.

Indien daar bewys kan word dat die tweede afgeleide $F''(R) = 0$ vir alle R in $(0, \infty)$, sal daaruit volg dat vergelyking (4) slegs die algemene oplossing (5) het. As die homogene vergelyking twee maal met betrekking tot R gedifferensieer word, is

$$(1 - \alpha_{so})\,\alpha_{\ell o}^2\,F''(\alpha_{\ell o}R) + (\alpha_{\ell o} - 1)\,\alpha_{so}^2\,F''(\alpha_{so}R) - (\alpha_{\ell o} - \alpha_{so})\,F''(R) = 0. \qquad (6)$$

In sowel hierdie as in die vorige funksionaalvergelykings word die betrokke funksie by drie verskillende argumente aangegee. Hierdie probleem kan die hoof gebied word deur ten eerste 'n funksie ψ van R (waaroor later meer besonderhede verskaf word) in te voer en met inagneming van (6) die volgende vergelyking op te stel:

$$\int_0^\infty \psi(R)\,[(1 - \alpha_{so})\,\alpha_{\ell o}^2\,F''(\alpha_{\ell o}R) + (\alpha_{\ell o} - 1)\,\alpha_{so}^2\,F''(\alpha_{so}R) - (\alpha_{\ell o} - \alpha_{so})\,F''(R)]\,dR = 0. \qquad (7)$$

Die integraal in hierdie vergelyking kan op 'n ooglopende wyse in drie dele geskei word. Deur in die eerste en tweede dele onderskeidelik die substitusies $y = \alpha_{\ell o}R$ en $y = \alpha_{so}R$ te maak, kan vergelyking (7) getransformeer word na die vorm

$$\int_0^\infty F''(y)\,[(1 - \alpha_{so})\,\alpha_{\ell o}\psi(y/\alpha_{\ell o}) + (\alpha_{\ell o} - 1)\,\alpha_{so}\psi(y/\alpha_{so}) - (\alpha_{\ell o} - \alpha_{so})\,\psi(y)]\,dy = 0. \qquad (8)$$

'N HULPVERGELYKING

Die vorm van vergelyking (8) en die doel van die artikel suggereer 'n ondersoek na die hulpvergelyking

$$(1 - \alpha_{so})\alpha_{\ell o}\,\psi(y/\alpha_{\ell o}) + (\alpha_{\ell o} - 1)\,\alpha_{so}\,\psi(y/\alpha_{so}) - (\alpha_{\ell o} - \alpha_{so})\,\psi(y) = y^2e^{-y} \qquad (9)$$

vir y in die interval $(0, \infty)$. As die hulpvergelyking 'n reeksoplossing

$$\psi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$$

het, volg dit uit 'n vergelyking van die koëffisiënte van dieselfde magte van y in (9) dat $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, en $a_n = (-1)^{n-2}/((n-2)!\,B_n)$ vir $n \geq 2$.

Hier is

$$\begin{aligned} B_n &= (1 - \alpha_{so})(\alpha_{\ell o}^{1-n} - 1) + (\alpha_{\ell o} - 1)(\alpha_{so}^{1-n} - 1) \\ &= (\alpha_{\ell o} - 1)(1 - \alpha_{so})\,[(1/\alpha_{so}^{n-1} - 1/\alpha_{\ell o}^{n-1}) + \ldots (1/\alpha_{so} - 1/\alpha_{\ell o})] \\ &\geq (\alpha_{\ell o} - 1)(1 - \alpha_{so})(1/\alpha_{so} - 1/\alpha_{\ell o}) \\ &= P > 0, \end{aligned}$$

waar die ongelykhede uit (2) volg. Vir y in die oop interval $(0,\infty)$ is dus

$$|\psi(y)| \leq \sum_{n=2}^{\infty} (1/P)\,y^n/(n-2)! = y^2e^{y}/P.$$

Gevolglik is die reeksoplossing $\psi(y)$ absoluut konvergent in $(0, \infty)$. Daarmee is die bestaan van 'n oplossing van die hulpvergelyking verseker.

GEVOLGTREKKINGS

Met behulp van die resultate van die vorige afdeling kan vergelyking (8) geskryf word in die vorm

$$\int_0^\infty F''(y)\,y^2e^{-y}\,dy = 0. \qquad (10)$$

Vir die spesiale geval van 'n simmetriese skeidingsproses is die bekende waardefunksie sodanig dat die ooreenkomstige funksie F konveks is. Dit sou redelik wees om te aanvaar dat dieselfde eienskap ook vir asimmetriese prosesse behoort te geld, en dit sou trouens ook uit fisiese oorwegings gemotiveer kon word. Met die aanname van konveksiteit, dit wil sê dat $F''(R) \geq 0$ vir alle R in die interval $(0, \infty)$, volg dit van (10) dat $F''(R) = 0$ vir alle R in hierdie interval. Soos reeds genoem, impliseer hierdie resultaat dat die waardefunksie vir asimmetriese isotoopskeiding uniek is.

By wyse van opsomming kan gesê word dat as F in (4) twee maal kontinu differensieerbaar en konveks in die oop interval $(0,\infty)$ is, dan is die waardefunksie V vir asimetriese isotoopskeiding uniek.

G. GELDENHUYS
Departement Toegepaste Wiskunde, Universiteit van Stellenbosch, Stellenbosch 7600

Ontvang 1 Desember 1987; aanvaar 4 Maart 1988

VERWYSINGS

1. Bulang, W., Groth, W., Jordan, I., Kolbe, W., Nann, E., Welge, K.H. (1960). Über das Trennpotential thermisch gesteuerter Gegenstrom-Gaszentrifugen. II. Unsymmetrischer Trennprozeß, *Z. Phys. Chem. Neue Folge*, 24, 249-264.
2. Cohen, K. (1951). The Theory of Isotope Separation as Applied to Large-Scale Production of U^{235} (McGraw-Hill, New York).
3. Haarhoff, P.C. (1976). Die helikontegniek vir isotoopverryking, *Tydskr. Natuurwet.*, 16, 68-126.
4. Kanagawa, A., Yamamoto, I. (1977). Value function and separative power for asymmetric separation process, *J. Nucl. Sci. Technol.*, 14, 282-287.
5. Pratt, H.R.C. (1967). *Countercurrent Separation Processes* (Elsevier, Amsterdam).