Navorsings- en Oorsigartikels

'n Karakterisering van bimatriksvariate verdelings, met verwysing na spesiale gevalle daarvan

A. Bekker en H.M. Rautenbach
Departement Statistiek, Randse Afrikaanse Universiteit, Posbus 524, Johannesburg 2000

J.J.J. Roux*
Departement Statistiek, Universiteit van Suid-Afrika, Posbus 392, Pretoria 0001

Ontvang 7 Augustus 1987; aanvaar 3 Oktober 1987

UITTREKSEL

Die versoenbaarheid van pare matriksvariate voorwaardelike digtheidsfunksies en die verkryging van unieke bimatriksvariate digtheidsfunksies word ondersoek. Voorbeelde wat die matriksvariate beta- en Wishartvoorwaardelike digtheidsfunksies insluit, word gegee. Die karakterisering van bivektorvariate en bivariate verdelings word ook van nader beskou.

ABSTRACT

A characterization of bimatrix variate distributions with special cases

The compatibility of pairs of matrix variate conditional densities and the uniqueness of the resulting bimatrix variate densities are investigated. Examples are given involving the matrix variate beta and Wishart conditional densities. Attention is also given to the characterization of bivector variate and bivariate distributions.

1. INLEIDING

Daar is aansienlike navorsing oor die karakterisering van verdelings gedoen, maar dit blyk egter dat daar tot dusver min aandag aan die matriksvariate geval gegee is. Indien die verdeling van byvoorbeeld 'n toetsstatistiek in meervariate analise onbekend is, is 'n karakteriseringstelling die enigste metode om die verdeling uniek te bepaal.

Laat $Z{:}2p \times 2p$ 'n simmetriese positiewe definiete matriks wees, waar Z soos volg onderverdeel word:

$$Z = \begin{bmatrix} X{:}p \times p & \cdot \\ \cdot & Y{:}p \times p \end{bmatrix}$$

Die gesamentlike verdeling van $X{:}p \times p$ en $Y{:}p \times p$ word 'n bimatriksvariate verdeling genoem. 'n Resultaat karakteriseer 'n bimatriksvariate verdeling indien dit 'n stel voorwaardes bevat wat slegs deur hierdie bimatriksvariate verdeling bevredig word. Daar bestaan belangstelling in die karakterisering van 'n bimatriksvariate verdeling wat op matriksvariate voorwaardelike verdelings gebaseer is, omdat data dikwels van 'n voorwaardelike aard is. 'n Voorwaardelike verdeling bevat ook meer informasie as die randverdeling. Vir 'n gegewe randverdeling en 'n gegewe voorwaardelike verdeling van 'n sekere vorm het Roux (1971a) 'n voldoende voorwaarde vir die unieke bestaan van 'n bimatriksvariate verdeling afgelei. Abrahams en Thomas (1984) bespreek sekere vrae oor versoenbaarheid, asook 'n resultaat om 'n bivariate verdeling in terme van voorwaardelike verdelings te karakteriseer. In hierdie artikel word die resultaat uitgebrei om die karakterisering van bimatriksvariate verdelings in te sluit.

In paragraaf 2 word die versoenbaarheid van die voorwaardelike verdeling van $X \mid Y$ en $Y \mid X$ en ook die verkryging van 'n unieke bimatriksvariate verdeling ondersoek. Enkele voorbeelde betreffende die karakterisering van bimatriksvariate verdelings word in paragraaf 3 gegee. As spesiale gevalle word die gesamentlike verdeling van $x{:}p \times 1$ en $y{:}p \times 1$ 'n bivektorvariate verdeling en die gesamentlike verdeling van x en y 'n bivariate verdeling genoem. In paragraaf 4 word voorbeelde van karakterisering van hierdie spesiale gevalle beskou.

Let op dat die notasie van Patil, *et al.* (1984a en 1984b) deurgaans gevolg word.

2. VERSOENBAARHEID EN KARAKTERISERING VAN BIMATRIKSVARIATE VERDELINGS

Die volgende definisies word vir matriksvariate gedefinieer (Dall'Aglio (1972)):

DEFINISIE 2.1

Gegee twee matriksvariate voorwaardelike waarskynlikheidsdigtheidsfunksies (wdf.'s), naamlik $g_1(X \mid Y)$ en $g_2(Y \mid X)$, dan word die familie van bimatriksvariate wdf.'s met $g_1(X \mid Y)$ en $g_2(Y \mid X)$ as voorwaardelike wdf.'s 'n klas genoem.

DEFINISIE 2.2

Hierdie klas is nie leeg nie indien daar ten minste 'n wdf. h(X,Y) bestaan met $g_1(X \mid Y)$ en $g_2(Y \mid X)$ as voorwaardelike wdf.'s, dan word gesê dat $g_1(X \mid Y)$ en $g_2(Y \mid X)$ versoenbaar is.

*Outeur aan wie korrespondensie gerig kan word.

OPMERKING 2.1

(i) Indien $g_1(X \mid Y)$ en $g_2(Y \mid X)$ versoenbaar is, dan bestaan daar ten minste 'n wdf. $h(X,Y)$ met $g_1(X \mid Y)$ en $g_2(Y \mid X)$ as voorwaardelike wdf.'s. Hieruit volg dat $h(X,Y)$ nie noodwendig uniek is nie.

(ii) Uit die definiëring van versoenbaarheid volg dat daar ook geen uitspraak oor die aard van die matriksvariate verdeling is nie.

STELLING 2.1

'n Nodige en voldoende voorwaarde vir die versoenbaarheid van 'n paar voorwaardelike wdf.'s, nl. $g_1(X \mid Y)$ en $g_2(Y \mid X)$, waar elk van hierdie wdf.'s nie-nul is, is dat

$$\frac{g_1(X \mid Y)}{g_2(Y \mid X)} \text{ van die vorm } \frac{u(X)}{v(Y)} \text{ is,}$$

waar u en v nie-negatiewe integreerbare funksies is,

sodanig dat $\int u(X)dX = \int v(Y)d(Y)$.

BEWYS

Om nodigheid te bewys, veronderstel dat $h(X,Y)$ bestaan; dan volg dat

$$\int h(X,Y)dX\, g_1(X \mid Y) = \int h(X,Y)dY\, g_2(Y \mid X).$$

$$\text{Dus } \frac{g_1(X \mid Y)}{g_2(Y \mid X)} = \frac{f_1(X)}{f_2(Y)}$$

$$= \frac{ku(X)}{kv(Y)} \text{ waar k 'n gemeenskaplike konstante is}$$

$$= \frac{u(X)}{\int u(X)dX} \bullet \frac{\int v(Y)dY}{v(Y)}$$

$$= \frac{u(X)}{v(Y)}.$$

Die voldoende voorwaarde asook uniekheid vir die bestaan van $h(X,Y)$ word soos volg bewys:

$$\frac{g_1(X \mid Y)}{g_2(Y \mid X)} = \frac{u(X)}{v(Y)}$$

$$= \frac{u(X)}{\int u(X)dX} \bullet \frac{\int v(Y)dY}{v(Y)}$$

$$= \frac{f_1(X)}{f_2(Y)}.$$

Vanuit bostaande volg dat

$$g_1(X \mid Y)f_2(Y) = h(X,Y) = g_2(Y \mid X)f_1(X).$$

OPMERKING 2.2

Die stelling geld ook waar X en Y vektorvariate of variate is.

3. ENKELE VOORBEELDE

In hierdie paragraaf word die gebruik van stelling 2.1 om 'n bimatriksvariate verdeling in terme van voorwaardelike verdelings te karakteriseer met voorbeelde toegelig. In die volgende voorbeelde asook dié in paragraaf 4 is albei die voorwaardelike wdf.'s gekies om dieselfde kontinue tipes te wees.

VOORBEELD 3.1 (Nie-gestandaardiseerde matriksvariate betavoorwaardelike wdf.'s van die eerste soort)

Veronderstel $X \mid Y \sim nsMBI(p,n,b, I-Y)$ en
$Y \mid X \sim nsMBI(p,m,b, I-X)$

met wdf.'s

$$g_1(X \mid Y)$$

$$= \frac{|I-Y|^{-\frac{1}{2}(n+b-p-1)}}{\beta_p(\frac{1}{2}n, \frac{1}{2}b)} |X|^{\frac{1}{2}(n-p-1)} |I-Y-X|^{\frac{1}{2}(b-p-1)}$$

$$\text{vir } X > O,\ (I-Y-X) > O,\ n \geq p,\ b \geq p$$

en

$$g_2(Y \mid X)$$

$$= \frac{|I-X|^{-\frac{1}{2}(m+b-p-1)}}{\beta_p(\frac{1}{2}m, \frac{1}{2}b)} |Y|^{\frac{1}{2}(m-p-1)} |I-X-Y|^{\frac{1}{2}(b-p-1)}$$

$$\text{vir } Y > O,\ (I-X-Y) > O,\ m \geq p,\ b \geq p.$$

Die verhouding is

$$\frac{g_1(X \mid Y)}{g_2(Y \mid X)}$$

$$= \frac{\Gamma_p(\frac{1}{2}(n+b))\,\Gamma_p(\frac{1}{2}m) |X|^{\frac{1}{2}(n-p-1)} |I-X|^{\frac{1}{2}(m+b-p-1)}}{\Gamma_p(\frac{1}{2}(m+b))\,\Gamma_p(\frac{1}{2}n) |Y|^{\frac{1}{2}(m-p-1)} |I-Y|^{\frac{1}{2}(n+b-p-1)}}$$

$$= \frac{u(X)}{v(Y)}$$

waar

$$\int_{O<X<I} u(X)dX$$

$$= \frac{\Gamma_p(\frac{1}{2}(n+b))\Gamma_p(\frac{1}{2}m)\Gamma_p(\frac{1}{2}n)\Gamma_p(\frac{1}{2}(m+b))}{\Gamma_p(\frac{1}{2}(n+m+b))}$$

$$= \int_{O<Y<I} v(Y)dY$$

sodat

$$f_1(X) = \frac{u(X)}{\int_{O<X<I} u(X)dX}$$

$$= \frac{|X|^{\frac{1}{2}(n-p-1)}}{\beta_p(\frac{1}{2}n, \frac{1}{2}(m+b))} |I-X|^{\frac{1}{2}(m+b-p-1)}$$

vir $X > O$, $(I-X) > O$, $n \geq p$, $m+b \geq p$.

Soortgelyk volg dat

$$f_2(Y) = \frac{v(Y)}{\int_{O<Y<I} v(Y)dY}$$

$$= \frac{|Y|^{\frac{1}{2}(m-p-1)}}{\beta_p(\frac{1}{2}m, \frac{1}{2}(n+b))} |I-Y|^{\frac{1}{2}(n+b-p-1)}$$

vir $Y > O$, $(I-Y) > O$, $m \geq p$, $n+b \geq p$.

Dit wil sê $X \sim MBI(p, n, m+b)$ en
$Y \sim MBI(p, m, n+b)$
(Olkin en Rubin (1964)).

Die bimatriksvariate wdf. word dus gegee deur

$$h(X,Y) = \frac{\Gamma_p(\frac{1}{2}(n+m+b))\ |X|^{\frac{1}{2}(n-p-1)}}{\Gamma_p(\frac{1}{2}n)\Gamma_p(\frac{1}{2}m)\Gamma_p(\frac{1}{2}b)} |Y|^{\frac{1}{2}(m-p-1)} \bullet |I-X-Y|^{\frac{1}{2}(b-p-1)}$$

vir $X > O$, $Y > O$, $(I-X-Y) > O$, $n \geqq p$, $m \geqq p$, $b \geqq p$.

OPMERKING 3.1.1

(i) Bostaande bimatriksvariate wdf. is die enigste met nie-gestandaardiseerde matriksvariate beta-voorwaardelike wdf.'s van die eerste soort (Tan (1969)) in gegewe vorm en staan bekend as 'n bimatriksvariate Dirichletverdeling van die eerste soort, met parameters p, n, m en b (Olkin en Rubin (1964)).

(ii) Die bimatriksvariate Dirichletverdeling van die eerste soort en matriksvariate betaverdeling van die eerste soort kom in verskillende probleme in meervariate analise voor. Verskeie toetskriteria soos voorgestel in die literatuur vir hipotesetoetsing in meervariate analise is funksies van hierdie verdelings.

VOORBEELD 3.2 (Wishartvoorwaardelike wdf.'s)

Laat $X|Y \sim W(p, n, (I+Y)^{-1})$ en
$Y|X \sim W(p, m, (I+X)^{-1})$.

Dan is

$$g_1(X|Y) = \frac{|X|^{\frac{1}{2}(n-p-1)}}{\Gamma_p(\frac{1}{2}n)|2(I+Y)^{-1}|^{\frac{1}{2}n}} e^{-\frac{1}{2}\mathrm{sp}(I+Y)X}$$

vir $X > O$

en

$$g_2(Y|X) = \frac{|Y|^{\frac{1}{2}(m-p-1)}}{\Gamma_p(\frac{1}{2}m)|2(I+X)^{-1}|^{\frac{1}{2}m}} e^{-\frac{1}{2}\mathrm{sp}(I+X)Y}$$

vir $Y > O$

met

$$\frac{g_1(X|Y)}{g_2(Y|X)} = \frac{\Gamma_p(\frac{1}{2}m)2^{\frac{1}{2}mp}|I+X|^{-\frac{1}{2}m}|X|^{\frac{1}{2}(n-p-1)}e^{-\frac{1}{2}\mathrm{sp}X}}{\Gamma_p(\frac{1}{2}n)2^{\frac{1}{2}np}|I+Y|^{-\frac{1}{2}n}|Y|^{\frac{1}{2}(m-p-1)}e^{-\frac{1}{2}\mathrm{sp}Y}}$$

$$= \frac{u(X)}{v(Y)}$$

Nou volg dat

$$\int_{X>O} u(X)dX$$

$$= \Gamma_p(\tfrac{1}{2}m)2^{\frac{1}{2}mp}\sum_{k=O}^{\infty}\sum_{\kappa}\frac{(\frac{1}{2}m)_\kappa}{k!}\int_{X>O}|X|^{\frac{1}{2}(n-p-1)}e^{-\frac{1}{2}\mathrm{sp}X}C_\kappa(-X)dX$$

waar $|I+X|^{-\frac{1}{2}m} = \sum_{k=O}^{\infty}\sum_{\kappa}\frac{(\frac{1}{2}m)_\kappa C_\kappa(-X)}{k!}$

(Muirhead (1982), p. 259)

$$= \Gamma_p(\tfrac{1}{2}n)\Gamma_p(\tfrac{1}{2}m)2^{\frac{1}{2}p(n+m)} \sum_{k=O}^{\infty}\sum_{\kappa}\frac{(\frac{1}{2}m)_\kappa(\frac{1}{2}n)_\kappa C_\kappa(-2I)}{k!}$$

$$= \Gamma_p(\tfrac{1}{2}n)\ \Gamma_p(\tfrac{1}{2}m)\ 2^{\frac{1}{2}p(n+m)}{}_2F_0(\tfrac{1}{2}n, \tfrac{1}{2}m; -2I)$$

$$= \int_{Y>O} v(Y)dY$$

met

$$f_1(X) = \frac{u(X)}{\int_{X>O} u(X)dX}$$

$$= \frac{2^{-\frac{1}{2}np}\ |X|^{\frac{1}{2}(n-p-1)}}{\Gamma_p(\frac{1}{2}n){}_2F_0(\frac{1}{2}n, \frac{1}{2}m; -2I)} |I+X|^{-\frac{1}{2}m}e^{-\frac{1}{2}\mathrm{sp}X}$$

vir $X > O$.

Soortgelyk volg dat

$$f_2(Y) = \frac{2^{-\frac{1}{2}mp}\ |Y|^{\frac{1}{2}(m-p-1)}}{\Gamma_p(\frac{1}{2}m){}_2F_0(\frac{1}{2}n, \frac{1}{2}m; -2I)} |I+Y|^{-\frac{1}{2}n}e^{-\frac{1}{2}\mathrm{sp}Y}$$

vir $Y > O$.

 ISSN 0254-3486 = *S.A. Tydskrif vir Natuurwetenskap en Tegnologie* 7, no. 2 1988

Dus: die bimatriksvariate wdf. word dus gegee deur

$$h(X,Y)$$

$$= \frac{2^{-\frac{1}{2}p(m+n)}}{\Gamma_p(\frac{1}{2}n)\Gamma_p(\frac{1}{2}m)\,_2F_0(\frac{1}{2}n, \frac{1}{2}m; -2I)}$$

$$\bullet |X|^{\frac{1}{2}(n-p-1)}|Y|^{\frac{1}{2}(m-p-1)}e^{\frac{1}{2}sp(X+Y+XY)}$$

vir $X > O$, $Y > O$.

OPMERKING 3.2.1
Die gesamentlike en randwdf.'s van die matriksvariate X en Y besit Wisharttipe verdelings. Beskou die randverdelings met wdf.

$$f(X) = \text{konstant } |X|^{\frac{1}{2}(n-p-1)}e^{-\frac{1}{2}sp\,X}$$
$$\bullet\ _1F_0(\ m; -X)$$

vir $X>O$.

Hierdie randverdeling is 'n veralgemening van die Wishartverdeling met een ekstra parameter (vergelyk Roux (1971b)). Let op dat daar wegbeweeg word van die beperking op die strukturele vorm van die Wishartverdeling (Press (1982), p. 164). Die nodigheid vir die veralgemening van bekende verdelings in meervariate analise word nou al vir 'n geruime tyd erken. Die ondersoek van die eienskappe het nog agterweë gebly. Hierdie bimatriksvariate verdeling geniet nog verdere aandag.

OPMERKING 3.1

(i) Veronderstel $X|Y \sim$ ns $MBII(p,n,m, I+Y)$ en $Y|X \sim$ ns $MBII(p,n,m, I+X)$, dan word die bimatriksvariate Dirichletverdeling van die tweede soort met parameters p,n,n en (m-n), met behulp van stelling 2.1, gekarakteriseer. Die randverdelings is elk matriksvariate betaverdelings van die tweede soort, met parameters p,n en (m-n).

(ii) Die geval waar die voorwaardelike verdelings matriksvariate normaalverdelings met lineêre regressie en konstante skedastisiteit is, is ook ondersoek. Die ooreenkomstige voorbeeld vir die vektorgeval word in voorbeeld 4.1.1 bespreek.

(iii) Die omgekeerde Wishartvoorwaardelike wdf.'s kan analoog aan voorbeeld 3.2 ook gebruik word om 'n bimatriksvariate verdeling te karakteriseer.

4. SPESIALE GEVALLE

In hierdie paragraaf word enkele voorbeelde gegee waar bivektorvariate asook bivariate verdelings gekarakteriseer word.

4.1 Bivektorvariate verdelings

VOORBEELD 4.1.1 (Meervariate normaalvoorwaardelike wdf.'s)

Veronderstel $\mathbf{x}|\mathbf{y} \sim MN(p, a\mathbf{y}+\mathbf{b}, I)$ en
$\mathbf{y}|\mathbf{x} \sim MN(p, a\mathbf{x}+\mathbf{d}, I)$

met die wdf.'s

$$g_1(\mathbf{x}|\mathbf{y})$$
$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}p}\text{eksp}\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-a\mathbf{y}-\mathbf{b})'(\mathbf{x}-a\mathbf{y}-\mathbf{b})\right\}$$

en

$$g_2(\mathbf{y}|\mathbf{x})$$
$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}p}\text{eksp}\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-a\mathbf{x}-\mathbf{d})'(\mathbf{y}-a\mathbf{x}-\mathbf{d})\right\}.$$

Die verhouding is

$$\frac{g_1(\mathbf{x}|\mathbf{y})}{g_2(\mathbf{y}|\mathbf{x})}$$

$$= \frac{\text{eksp}\{-\frac{1}{2}[(1-a^2)\mathbf{x}'\mathbf{x}-\mathbf{x}'(\mathbf{b}+a\mathbf{d})-(\mathbf{b}+a\mathbf{d})'\mathbf{x}-\mathbf{d}'\mathbf{d}]\}}{\text{eksp}\{-\frac{1}{2}[(1-a^2)\mathbf{y}'\mathbf{y}-\mathbf{y}'(\mathbf{d}+a\mathbf{b})-(\mathbf{d}+a\mathbf{b})'\mathbf{y}-\mathbf{b}'\mathbf{b}]\}}$$

$$= \frac{u(\mathbf{x})}{v(\mathbf{y})}$$

waar

$$\int_{-\infty<\mathbf{x}<\infty} u(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

$$= \text{eksp}\{\tfrac{1}{2}(1-a^2)^{-1}[\mathbf{b}'\mathbf{b}+a\mathbf{b}'\mathbf{d}+a\mathbf{d}'\mathbf{b}+\mathbf{d}'\mathbf{d}]\}$$
$$\bullet \int\text{eksp}\{-\tfrac{1}{2}(1-a^2)\left[\mathbf{x}-\frac{(\mathbf{b}+a\mathbf{d})}{(1-a^2)}\right]'\left[\mathbf{x}-\frac{(\mathbf{b}+a\mathbf{d})}{(1-a^2)}\right]\}d\mathbf{x}$$

$$=(2\pi)^{\frac{1}{2}p}(1-a^2)^{-\frac{1}{2}p}\text{eksp}\{\tfrac{1}{2}(1-a^2)^{-1}[\mathbf{b}'\mathbf{b}+a\mathbf{b}'\mathbf{d}+a\mathbf{d}'\mathbf{b}+\mathbf{d}'\mathbf{d}]\}$$

$$= \int v(\mathbf{y})d\mathbf{y}$$

Gevolglik is

$$\mathbf{x} \sim MN(p,(1-a^2)^{-1}(\mathbf{b}+a\mathbf{d}), (1-a^2)^{-1}I)$$
en $\mathbf{y} \sim MN(p,(1-a^2)^{-1}(\mathbf{d}+a\mathbf{b}), (1-a^2)^{-1}I)$

met veralgemeende bivektorvariate normaalwdf.:

$$h(\mathbf{x},\mathbf{y})$$
$$= (2\pi)^{-p}(1-a^2)^{\frac{1}{2}p}\text{ eksp}\{-\tfrac{1}{2}[\mathbf{x}'\mathbf{x}+\mathbf{y}'\mathbf{y}-\mathbf{x}'\mathbf{b}-\mathbf{b}'\mathbf{x}-\mathbf{y}'\mathbf{d}$$
$$-\mathbf{d}'\mathbf{y}-a\mathbf{y}'\mathbf{x}-a\mathbf{x}'\mathbf{y}+\mathbf{d}'\mathbf{d}+(1-a^2)^{-1}(\mathbf{b}+a\mathbf{d})'(\mathbf{b}+a\mathbf{d})]\}.$$

Dit wil sê $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \sim gMTN[p,2,M,(1-a^2)^{-1}I\otimes\begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1\end{bmatrix}]$

met $M = \left[\frac{\mathbf{b}+a\mathbf{d}}{1-a^2}, \frac{\mathbf{d}+a\mathbf{b}}{1-a^2}\right]$

VOORBEELD 4.1.2 (Meervariate lognormaalvoorwaardelike wdf.'s)

Veronderstel $\mathbf{x}|\mathbf{y}$ besit die meervariate lognormaalverdeling met parameters p, a log $\mathbf{y}$ en I, terwyl $\mathbf{y}|\mathbf{x}$ die meervariate lognormaalverdeling met parameters p, a log $\mathbf{x}$ en I besit (Jones en Miller (1966)).

Die verhouding is

$$\frac{g_1(x|y)}{g_2(y|x)}$$

$$= \frac{(2\pi)^{-\frac{1}{2}p}\left[\prod_{i=1}^{p} x_i\right]^{-1} \text{eksp}\{-\frac{1}{2}(\log x - a\log y)'(\log x - a\log y)\}}{(2\pi)^{-\frac{1}{2}p}\left[\prod_{i=1}^{p} y_i\right]^{-1} \text{eksp}\{-\frac{1}{2}(\log y - a\log x)'(\log y - a\log x)\}}$$

$$= \frac{\left[\prod_{i=1}^{p} x_i\right]^{-1} \text{eksp}\{-\frac{1}{2}(1-a^2)(\log x)'(\log x)\}}{\left[\prod_{i=1}^{p} y_i\right]^{-1} \text{eksp}\{-\frac{1}{2}(1-a^2)(\log y)'\log y\}}$$

$$= \frac{u(x)}{v(y)}$$

waar

$$\int_{x>0} u(x)dx = (2\pi)^{\frac{1}{2}p}(1-a^2)^{-\frac{1}{2}p} = \int_{y>0} v(y)dy$$

sodat

$$f_1(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}p}(1-a^2)^{\frac{1}{2}p}\left[\prod_{i=1}^{p} x_i\right]^{-1}$$

$$\text{eksp}\{-\frac{1}{2}(1-a^2)(\log x)'\log x\}$$

Dus: die randverdelings van **x** en **y** is elk meervariate lognormaal met parameters p, $\mu = 0$ en $(1-a^2)^{-1}I$.

Die veralgemeende bivektorvariate lognormaalwdf. word gegee deur

$$h(x,y)$$

$$= \left[\prod_{i=1}^{p} x_i\right]^{-1}\left[\prod_{i=1}^{p} y_i\right]^{-1}(2\pi)^{-p}(1-a^2)^{\frac{1}{2}p}$$

$$\bullet\ \text{eksp}\{-\frac{1}{2}[(\log x)'\log x + (\log y)'\log y - a(\log y)'\log x - a(\log x)'\log y]\}$$

4.2 Bivariate verdelings

VOORBEELD 4.2.1 (Tweeparameter gammavoorwaardelike wdf.'s)

Veronderstel $x|y \sim Gtp(2(1+y)^{-1}, \frac{1}{2}n)$ en

$y|x \sim Gtp(2(1+x)^{-1}, \frac{1}{2}m)$.

Die verhouding is

$$\frac{g_1(x|y)}{g_2(y|x)}$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{1}{2}m)\, 2^{\frac{1}{2}m}\, x^{\frac{1}{2}n-1}(1+x)^{-\frac{1}{2}m} e^{-\frac{1}{2}x}}{\Gamma(\frac{1}{2}n)\, 2^{\frac{1}{2}n}\, y^{\frac{1}{2}m-1}(1+y)^{-\frac{1}{2}n} e^{-\frac{1}{2}y}}$$

$$= \frac{u(x)}{v(y)}$$

waar

$$\int_0^\infty u(x)dx = \Gamma(\tfrac{1}{2}m)2^{\frac{1}{2}m}\int_0^\infty {}_1F_0(\tfrac{1}{2}m; -x)x^{\frac{1}{2}n-1}e^{-\frac{1}{2}x}dx$$

$$= 2^{\frac{1}{2}m}\int_0^\infty E(\tfrac{1}{2}m; x^{-1})x^{\frac{1}{2}n-1}e^{-\frac{1}{2}x}dx$$

waar E (•) MacRobert se E-funksie is.

$$= 2^{\frac{1}{2}(m+n)}E(\tfrac{1}{2}m, \tfrac{1}{2}n; \tfrac{1}{2}) \text{ (Erdélyi et al. (1954), p.222)}$$

$$= \int_0^\infty v(y)dy$$

sodat

$$f_1(x) = \frac{2^{-\frac{1}{2}n}\, x^{\frac{1}{2}n-1}(1+x)^{-\frac{1}{2}m}e^{-\frac{1}{2}x}}{\Gamma(\frac{1}{2}n)\, {}_2F_0(\frac{1}{2}m, \frac{1}{2}n; -2)}$$

vir x>0

en

$$h(x,y) = \frac{x^{\frac{1}{2}n-1}\, y^{\frac{1}{2}m-1}\, e^{-\frac{1}{2}(x+y+xy)}}{\Gamma(\frac{1}{2}n)\Gamma(\frac{1}{2}m)\, 2^{\frac{1}{2}(m+n)}\, {}_2F_0(\frac{1}{2}m, \frac{1}{2}n; -2)}$$

vir x>0, y>0.

OPMERKING 4.2.1
Hierdie gesamentlike wdf. (Mardia (1970), p. 47) is 'n spesiale geval van die bimatriksvariate wdf. in voorbeeld 3.2, waar p = 1.

VOORBEELD 4.2.2 (Saamgestelde gammavoorwaardelike wdf.'s van die eerste soort)

Laat

$$g_1(x|y) = \frac{1}{B(p,k)}(1+y)^k x^{p-1}(x+y+1)^{-(p+k)}$$

vir x>0, (1 + y)>0

en

$$g_2(y|x) = \frac{1}{B(p,k)}(1+x)^k y^{p-1}(y+x+1)^{-(p+k)}$$

vir y>0, (1 + x)>0, p>0, k>0.

Dan is $\frac{g_1(x|y)}{g_2(y|x)}$ van die vorm $\frac{u(x)}{v(y)}$

met $u(x) = x^{p-1}(1+x)^{-k}$ en $v(y) = y^{p-1}(1+y)^{-k}$

waar $\int_0^\infty u(x)dx = B(p, k-p)$.

Gevolglik besit x en y elk die betaverdeling van die tweede soort met parameters p en $k-p$. Die bivariate verdeling is die omgekeerde Dirichletverdeling (of Dirichletverdeling van die tweede soort) met parameters 2, $2(k-p)$, 2p en 2p (Tiao en Guttman (1965)).

OPMERKING 4.2.2

Abrahams en Thomas (1984) gee voorbeelde wat die beta van die eerste soort, die eenparameter eksponensiaal en die normaal as voorwaardelike wdf.'s insluit.

VERWYSINGS

1. Abrahams, J. & Thomas, J.B. (1984). A note on the characterization of bivariate densities by conditional densities, *Comm. Statist.-Theor. Meth.*, 13, 3, 395-400.
2. Dall'Aglio, G. (1972). Frechet classes and compatibility of distribution functions, *Symposia Mathematica*, 9 (Academic Press, New York) p. 131.
3. Erdélyi A. *et al.* (1954). *Tables of integral transforms 1* (McGraw-Hill, New York).
4. Jones, R.M. & Miller, K.S. (1966). On the multivariate lognormal distribution, *Indust. Math.*, 16, 2, 63-76.
5. Mardia, K.V. (1970). *Families of bivariate distributions* (Hafner Publishing Company, Darien, Conn.).
6. Muirhead, R.J. (1982). *Aspects of multivariate statistical theory* (John Wiley & Sons, New York).
7. Olkin, I. & Rubin, H. (1964). Multivariate beta distributions and independence properties of the Wishart distribution, *Ann. Math. Statist.*, 35, 261-269.
8. Patil, G.P. *et al.* (1984a). *Dictionary and classified bibliography of statistical distributions in scientific work*, 2: *Continuous Univariate Models* (International Co-operative Publishing House, Fairland).
9. Patil, G.P. *et al.* (1984b). *Dictionary and classified bibliography of statistical distributions in scientific work*, 3: *Multivariate Models* (International Co-operative Publishing House, Fairland).
10. Press, S.J. (1982). *Applied multivariate analysis: using Bayesian and frequentist methods of inference*.(Robert E. Krieger Publishing Company, Malabar).
11. Roux, J.J.J. (1971a). A characterization of a multivariate distribution, *South African Statist. J.*, 5, 1, 27-36.
12. Roux, J.J.J. (1971b). On generalized multivariate distributions, *South African Statist. J.*, 5, 2, 91-100.
13. Tan, W.Y. (1969). Note on the multivariate and the generalized multivariate beta distributions, *J. Amer. Statist. Assoc.*, 64, 230-241.
14. Tiao, G.C. & Guttman, I. (1965). The inverted Dirichlet distribution with applications, *J. Amer Statist. Assoc.*, 60. 793-805.