Oor die onvoorwaardelike lognormaalverdeling

J. J. J. Roux* en A. Bekker

Departement Statistiek, Universiteit van Suid-Afrika, Posbus 392, Pretoria 0001

C. A. van der Merwe

Departement Kwantitatiewe Bestuur, Universiteit van Suid-Afrika, Posbus 392, Pretoria 0001

Ontvang 5 September 1988; aanvaar 19 Junie 1989

UITTREKSEL

Die onvoorwaardelike lognormaalverdeling wat ryk aan parameters is, word voorgestel en na 'n meervariante verdeling uitgebrei. Teoretiese eienskappe en 'n toepassing van die onvoorwaardelike lognormaalmodel word gegee.

ABSTRACT

On the unconditional lognormal distribution

The unconditional lognormal distribution that is rich in parameters is introduced and extended to a multivariate distribution. Theoretical properties and an application of the unconditional lognormal model are given.

1. INLEIDING

Die tweeparameter lognormaalverdeling met waarskynlikheidsdigtheidsfunksie (wdf.)

$$(1.1) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma x} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (\log x - v)^2 \right\}$$

$(x > 0, -\infty < v < \infty, \sigma > 0)$

is die beste bekend as 'n model vir inkomsteverdelings.^{1,2} Veronderstel die parameter v in (1.1) is 'n funksie van 'n variaat Y , dan word die voorwaardelike wdf. van X gegee $Y = y$ die volgende:

$$(1.2) \quad f(x|y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma x} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (\log x - v(y))^2 \right\}$$

$(x > 0, -\infty < v(y) < \infty, \sigma > 0)$

waar

$$(1.3) \quad E(X|Y=y) = e^{v(y) + \frac{1}{2}\sigma^2}$$

die regressiefunksie is. Die waarde van $v(y)$ word bepaal uit die verskillende vorms wat die regressie kan aanneem. Die variaat Y word dus gedefinieer as sodanige faktor wat die verdeling van X of die parameters van die verdeling van X beïnvloed.³ In hierdie artikel word aan laasgenoemde aandag gegee. Dit is bekend dat die onvoorwaardelike wdf. van X vanuit

$$(1.4) \quad h(x) = \int f(x|y)g(y)dy$$

vir 'n gegewe wdf. van Y en sekere vorms van die regressie verkry kan word. Let op dat die integrasie hier afhanklik van die keuse van die verdelings is. In die ondersoek na $h(x)$ moet vasgestel word of die populasie van saamgevoegde groepe 'n lognormaalverdeling het.

In paragraaf 2 word enkele stellings afgelei waar die onvoorwaardelike verdeling 'n lognormaalverdeling is. Hierdie onvoorwaardelike lognormaalverdeling besit die vorm van die tweeparameter lognormaalverde-

*Outeur aan wie korrespondensie gerig kan word.

ling, maar is ryker aan parameters. In plaas van die tweeparameter lognormaalverdeling kan die drieparameter lognormaalverdeling beskou word en soortgelyke stellings volg. In paragraaf 3 word Pearson⁴ se seleksieprosedures gevolg om die invloed van verandering in die parameters van die verdeling van Y op die parameters van die onvoorwaardelike verdeling van X vas te stel. 'n Metode om beramers vir die parameters van die onvoorwaardelike lognormaalverdeling te bepaal, word in paragraaf 4 bespreek. In paragraaf 5 word die passing van die onvoorwaardelike lognormaalverdeling op 'n inkomstedatastel geïllustreer. Volgens Johnson en Kotz⁵ word die passing hier beskou as die opsplitsing van 'n heterogene populasie in homogene dele. In paragraaf 6 word die onvoorwaardelike verdeling van 'n meervariante verdeling uitgebrei.

Let op dat die notasie van Patil *et al.*^{6,7} deurgaans gevolg word. Byvoorbeeld, indien $X \sim \text{Lontp}(v, \sigma)$ dan word die wdf. in (1.1) gegee.

2. AFLEIDINGS VAN DIE ONVOORWAARDELIKE LOGNORMAALVERDELING

In die volgende twee stellings word die regressie van X op Y gespesifiseer afhange van die verdeling van die faktor Y om sodoende die onvoorwaardelike verdeling te vind.

Stelling 2.1

Veronderstel dat $X|Y \sim \text{Lontp}(v(y), \sigma)$, $Y \sim N(\mu, \theta)$ en $E(X|Y=y) = e^{\gamma y + \beta}$ waar γ and β konstantes is. Dan besit X 'n onvoorwaardelike lognormaalverdeling met parameters μ , γ , β , θ en σ .

Bewys

Vir $E(X|Y=y) = e^{\gamma y + \beta}$ volg uit (1.3) dat $v(y) = \gamma y + \beta - \frac{1}{2}\sigma^2$ en die voorwaardelike wdf. is dan

$$(2.1) \quad f(x|y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma x} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (\log x - \gamma y - \beta - \frac{1}{2}\sigma^2)^2 \right\} \\ (x > 0, -\infty < y; \gamma; \beta < \infty, \sigma > 0).$$

Deur gebruik te maak van (2.1) en die wdf. van Y, naamlik

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \theta} \exp \left\{ -\frac{1}{2\theta^2} (y - \mu)^2 \right\} \\ (-\infty < y; \mu < \infty, \theta > 0)$$

volg uit (1.4) dat die onvoorwaardelike wdf.

$$h(x) = \frac{1}{2\pi\theta\sigma x} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2\theta^2} (y - \mu)^2 + \frac{1}{\sigma^2} (\log x - \gamma y - \beta + \frac{1}{2}\sigma^2)^2 \right\} dy \text{ is.}$$

Na voltooiing van die vierkant en vereenvoudiging is (2.2)

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} x (\gamma^2 \theta^2 + \sigma^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2(\gamma^2 \theta^2 + \sigma^2)} (\log x - \gamma \mu - \beta + \frac{1}{2}\sigma^2)^2 \right\} \\ (x > 0, -\infty < \mu; \gamma; \beta < \infty, \theta; \sigma > 0)$$

wat dieselfde vorm as (1.1) het. Dus is

$$X \sim \text{Lontp}(\gamma \mu + \beta - \frac{1}{2}\sigma^2, (\gamma^2 \theta^2 + \sigma^2)^{\frac{1}{2}}). \quad \blacksquare$$

Stelling 2.2

Indien $X|Y \sim \text{Lontp}(v(y), \sigma)$, $Y \sim \text{Lontp}(\mu, \theta)$ en $E(X|Y=y) = e^{\gamma \log y + \beta}$ waar γ en β konstantes is, dan is die onvoorwaardelike verdeling van X 'n lognormaalverdeling met parameters μ , γ , β , θ en σ .

Bewys

Vanuit (1.3) en $E(X|Y=y) = e^{\gamma \log y + \beta}$ volg dat $v(y) = \gamma \log y + \beta - \frac{1}{2}\sigma^2$. Dan is die voorwaardelike wdf.

$$f(x|y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma x} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (\log x - \gamma \log y - \beta + \frac{1}{2}\sigma^2)^2 \right\} \\ (x; y > 0, -\infty < \gamma; \beta < \infty, \sigma > 0)$$

en die onvoorwaardelike wdf. uit (1.4) en (1.1) is

$$(2.3) \quad h(x) = \frac{1}{2\pi\theta\sigma x} \int_0^x \exp \left\{ -\frac{1}{2\theta^2} (\log y - \mu)^2 + \frac{1}{\sigma^2} (\log x - \gamma \log y - \beta + \frac{1}{2}\sigma^2)^2 \right\} y^{-1} dy.$$

Na voltooiing van die vierkant en vereenvoudiging is die onvoorwaardelike wdf. in (2.3) dieselfde as in (2.2). $\blacksquare$

Opmerking 2.1

- Vir die onvoorwaardelike lognormaalverdeling is die gemiddelde $e^{\gamma\mu + \beta + \frac{1}{2}\gamma^2\theta^2}$ en die variansie $(e^{2\gamma\mu + 2\beta + \gamma^2\theta^2})(e^{2\theta^2 + \sigma^2} - 1)$.
- Vir $Z = X + x$, bring die lokaliteitsparameter x teweeg dat die onvoorwaardelike lognormaalverdeling 'n sesparameterverdeling word met tipiese vorm van die bekende drieparameter lognormaalverdeling met x as die onderste grens.
- Hierdie onvoorwaardelike lognormaalverdeling kan ook beskou word as die verdelings van
 - $e^{\theta U_1 + \gamma\mu + \beta - \frac{1}{2}\sigma^2 + \sigma U_2}$ met U_1 en U_2 as onafhanklike $N(0,1)$ -variate of
 - $e^{\gamma\mu + \beta - \frac{1}{2}\sigma^2 + \sigma Z_1}$ met $Z_1 \sim \text{Lontp}(0, \gamma\theta)$ onafhanklik van $Z_2 \sim \text{Lontp}(0, \sigma)$.
- Indien $X \sim \text{Lontp}(\gamma\mu + \beta - \frac{1}{2}\sigma^2, (\gamma^2\theta^2 + \sigma^2)^{\frac{1}{2}})$

dan volg dat

$$\log X \sim N(\gamma\mu + \beta - \frac{1}{2}\sigma^2, (\gamma^2\theta^2 + \sigma^2)^{\frac{1}{2}}).$$

In die volgende stelling word die verdelings van $X|Y$ en Y in stelling 2.2 met die drieparameter lognormaalverdeling vervang. Hier is die spesifieke regressievorm besonder beperkend op die keuse van die parameters van die verdelings.

Stelling 2.3

Indien $X|Y \sim \text{Lon}(v(y), \sigma, \alpha)$, $Y \sim \text{Lon}(\mu, \theta, a)$ en $E(X|Y=y) = e^{\gamma \log(y-a) + \beta} + \alpha$, dan is die onvoorwaardelike verdeling van X 'n lognormaalverdeling met parameters μ , γ , β , θ , σ en α .

Bewys

Die bewys volg soortgelyk as stelling 2.2. Dus is

$$X \sim \text{Lon}(\gamma\mu + \beta - \frac{1}{2}\sigma^2, (\gamma^2\theta^2 + \sigma^2)^{1/2}, \alpha). \quad \blacksquare$$

Opmerking 2.2

Hierdie uitbreiding na die drieparameter lognormaalverdeling kan ook vir stelling 2.1 gedoen word.

3. DIE INVLOED VAN SELEKSIE OP DIE ONVOORWAARDELIKE LOGNORMAALVERDELING

'n Seleksie uit die groep wat faktor Y voorstel, word op sodanige wyse geneem dat die vorm van die verdeling van hierdie geselekteerde groep ooreenkom met die oorspronklike verdeling, maar met 'n verskil in die parameters. Die effek hiervan op die ooreenstemmende onvoorwaardelike lognormaalverdeling van X word in stelling 3.1 gegee.

Stelling 3.1

Laat $X|Y \sim \text{Lontp}(v(y), \sigma)$, $E(X|Y=y) = e^{\gamma + \beta}$ en $Y \sim N(\mu, \theta)$. Vir $U = (Y - \mu)/\theta$ selekteer 'n groep, vanuit die populasie wat hierdie standaardnormaalverdeling besit, met gemiddelde h en variansie r^2 . Dan volg dat

$$X \sim \text{Lontp}(h\gamma\theta + \gamma\mu + \beta - \frac{1}{2}\sigma^2, (r^2\gamma^2\theta^2 + \sigma^2)^{1/2}).$$

Bewys

Vir $U = (Y - \mu)/\theta$ en $Z = \log X$ is die gesamentlike wdf.

$$f(u, z) = \frac{1}{2\pi\sigma} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sigma^2} (z - \gamma\mu - \beta + \frac{1}{2}\sigma^2 - \gamma u \theta)^2 + u^2 \right] \right\}$$

$$(-\infty < u, z < \infty, \theta; \sigma > 0, -\infty < \mu; \gamma; \beta < \infty)$$

en word die gesamentlike momentvoortbringende funksie gegee deur

$$(3.1) \quad M(t_1, t_2) = E[e^{t_1 Z + t_2 U}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} e^{t_2 u} e^{\gamma\mu + \beta - \frac{1}{2}\sigma^2} e^{t_1 \gamma u \theta} e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t_1^2} du$$

Die effek van seleksie word verkry deur $e^{-\frac{1}{2}u^2} du$ met $\frac{1}{r} e^{-\frac{1}{2r^2}(u-h)^2} du$ te vervang.

Nou volg vanuit (3.1) dat

$$(3.2) \quad \hat{M}(t_1, t_2) = \exp \left\{ ht_2 + (h\gamma\theta + \gamma\mu + \beta - \frac{1}{2}\sigma^2)t_1 + \frac{1}{2}(\sigma^2 + r^2\gamma^2\theta^2)t_1^2 + r^2\gamma\theta t_1 t_2 + \frac{1}{2}r^2 t_2^2 \right\}$$

wat die momentvoortbringende funksie van 'n bivariate normaalverdeling is.

$$\text{Gevolglik is } Z \sim N(h\gamma\theta + \gamma\mu + \beta - \frac{1}{2}\sigma^2,$$

$$(r^2\gamma^2\theta^2 + \sigma^2)^{1/2}) \text{ uit (3.2) en dus is}$$

$$X \sim \text{Lontp}(h\gamma\theta + \gamma\mu + \beta - \frac{1}{2}\sigma^2, (r^2\gamma^2\theta^2 + \sigma^2)^{1/2}). \quad \blacksquare$$

4. PROSEDURES OM DIE MAKSIMUM AANNEEMLIKHEIDSBERAMINGS TE VIND.

By die bepaling van maksimum aanneemlikheidsberamers van β en σ^2 beskou 'n steekproef X_i vir $i = 1, 2, \dots, n$ van 'n variaat X met wdf. (2.2) vir μ , θ^2 en γ bekend.

Die aanneemlikheidsfunksie is

$$(4.1) \quad L(\beta, \sigma^2) = \frac{1}{\pi} \prod_{i=1}^n (2\pi)^{-1/2} (\gamma^2\theta^2 + \sigma^2)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2(\gamma^2\theta^2 + \sigma^2)} \sum_{i=1}^n (\log x_i - \gamma\mu - \beta + \frac{1}{2}\sigma^2)^2 \right\}$$

sodat

$$\frac{\partial \ln L(\beta, \sigma^2)}{\partial \beta} = (\gamma^2\theta^2 + \sigma^2)^{-1} \sum_{i=1}^n (\log x_i - \gamma\mu - \beta + \frac{1}{2}\sigma^2)$$

en

$$\frac{\partial \ln L(\beta, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\frac{1}{2} n (\gamma^2\theta^2 + \sigma^2)^{-1} + \frac{1}{2} (\gamma^2\theta^2 + \sigma^2)^{-2} \sum_{i=1}^n (\log x_i - \gamma\mu - \beta + \frac{1}{2}\sigma^2)^2 - \frac{1}{2} (\gamma^2\theta^2 + \sigma^2)^{-1} \sum_{i=1}^n (\log x_i - \gamma\mu - \beta + \frac{1}{2}\sigma^2).$$

Dus word die maksimum aanneemlikheidsberamers vir β en σ^2 gegee deur

$$\hat{\beta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log x_i - \gamma\mu + \frac{\hat{\sigma}^2}{2}$$

$$\text{en } \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\log x_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log x_i \right)^2 - \gamma^2\theta^2.$$

5. TOEPASSING

In hierdie paragraaf word die inkomstegegewens, soos verkry van die Buro vir Marknavorsing van Unisa, van swartes in Pretoria in 1975 beskou.

Gestel X is die totale inkomste van die hoof van die huis en $N = 394$ is die aantal huise in die steekproef. Die totale inkomste hier is nie 'n suiwer of homogene inkomste nie. As ouderdom Y 'n inkomstebepalende faktor is, kan verwag word dat persone in hierdie populasie binne dieselfde ouderdomklas 'n homogene groep vorm. By die passing van die onvoorwaardelike lognormaalverdeling op X word van stelling 2.1 gebruik gemaak. Hier word aangeneem dat die ouderdom normaal verdeel is en die regressiefunksie negatief eksponensiaal, d.w.s. die inkomste neem af met ouderdom. Die maksimum aanneemlikheidsberamings is $\hat{\beta} = 7.8599$ en $\hat{\sigma} = 0.5916$ vir $\mu = 45.932$, $\theta = 11.851$ en $\gamma = -0.0107$.

Die passing van die onvoorwaardelike lognormaalverdeling vir die inkomste X word in figuur 5.1 gegee. Alhoewel die passing van die onvoorwaardelike log-

normaalmodel op hierdie datastel nie noodwendig die beste is nie, word daar wel aan homogeniteit voldoen. Die rede hiervoor is dat daar 'n aantal hoofde met 'n baie lae inkomste is. Die onvoorwaardelike lognormaalmodel vir 'n gegewe x in opmerking 2.1(b) sal 'n beter passing lewer.

Frekwensie

Figuur 1: Passing van die onvoorwaardelike lognormaalverdeling.

6. MEERVARIATE UITBREIDING VAN DIE STELLINGS

Die lognormaalverdeling is deur Jones en Miller⁸ na die meervariante lognormaalverdeling uitgebrei. Indien $\underline{X} \sim \text{MLON}(p, \underline{\mu}, \underline{\Sigma})$ dan word die wdf. gegee deur

$$f(\underline{x}) = (2\pi)^{-1p} |\underline{\Sigma}|^{-1} \left[\prod_{i=1}^p \frac{1}{x_i} \right] \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\log \underline{x} - \underline{\mu})' \underline{\Sigma}^{-1} (\log \underline{x} - \underline{\mu}) \right\} \\ (x_i > 0, -\infty < \mu_i < \infty, 1 \leq i \leq p, \underline{\Sigma} > 0).$$

Stelling 6.1

Veronderstel dat $\underline{X}|\underline{Y} \sim \text{MLON}(p, \underline{v}(\underline{Y}), \underline{\Sigma})$, $\underline{Y} \sim \text{MN}(p, \underline{\mu}, \underline{\Theta})$ en $E(\underline{X}_i|\underline{Y} = \underline{y}) = e^{\underline{v}_i(\underline{y}) + \beta_i}$ met $\underline{v}'_i(\underline{y}) = (0, \dots, \gamma_i, \dots, 0)$ waar γ_i in die i -de posisie is. Dan besit $\underline{X}$ 'n onvoorwaardelike meervariante lognormaalverdeling met parameters $p, \underline{\mu}, \underline{\gamma}, \underline{\beta}, \underline{\Theta}$ en $\underline{\Sigma}$.

Bewys

Uit Jones en Miller⁸ is

$$E(\underline{X}_i|\underline{Y} = \underline{y}) = e^{\underline{v}_i(\underline{y}) + \beta_i} \text{ sodat } \underline{v}(\underline{y}) = \underline{\gamma}\underline{y} + \underline{\beta} - \frac{1}{2}\underline{\sigma}^2$$

$$\text{waar } \underline{v}(\underline{y}) = \begin{bmatrix} v_1(\underline{y}) \\ \vdots \\ v_p(\underline{y}) \end{bmatrix}, \underline{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix}, \underline{\sigma}^2 = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 \\ \vdots \\ \sigma_p^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{en } \underline{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \dots & \sigma_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1p} & \dots & \sigma_p^2 \end{bmatrix}.$$

Die voorwaardelike meervariante wdf. is dan

$$f(\underline{x}|\underline{y}) = (2\pi)^{-1p} |\underline{\Sigma}|^{-1} \left[\prod_{i=1}^p \frac{1}{x_i} \right] \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\log \underline{x} - \underline{\gamma}\underline{y} - \underline{\beta} + \frac{1}{2}\underline{\sigma}^2)' \underline{\Sigma}^{-1} \cdot (\log \underline{x} - \underline{\gamma}\underline{y} - \underline{\beta} + \frac{1}{2}\underline{\sigma}^2) \right\}$$

$$(x_i > 0, -\infty < y_i < \infty; \gamma_i < \infty, \sigma_i > 0, \underline{\Sigma} > 0)$$

en die wdf. van $\underline{Y}$ word gegee deur

$$g(\underline{y}) = (2\pi)^{-1p} |\underline{\Theta}|^{-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\underline{y} - \underline{\mu})' \underline{\Theta}^{-1} (\underline{y} - \underline{\mu}) \right\} \\ (-\infty < y_i < \infty, -\infty < \mu_i < \infty, \underline{\Theta} > 0).$$

Dus volg die onvoorwaardelike meervariante wdf. as

$$h(\underline{x}) = (2\pi)^{-1p} |\underline{\Theta}|^{-1} |\underline{\Sigma}|^{-1} \left[\prod_{i=1}^p \frac{1}{x_i} \right] \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\underline{y} - \underline{\mu})' \underline{\Theta}^{-1} (\underline{y} - \underline{\mu}) \right. \\ \left. + (\log \underline{x} - \underline{\gamma}\underline{y} - \underline{\beta} + \frac{1}{2}\underline{\sigma}^2)' \underline{\Sigma}^{-1} \cdot (\log \underline{x} - \underline{\gamma}\underline{y} - \underline{\beta} + \frac{1}{2}\underline{\sigma}^2) \right\} d\underline{y}.$$

Na voltooiing van die vierkant en vereenvoudiging is

$$(6.1) \quad h(\underline{x}) = (2\pi)^{-1p} |\underline{\gamma}^2 \underline{\Theta} + \underline{\Sigma}|^{-1} \left[\prod_{i=1}^p \frac{1}{x_i} \right] \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\log \underline{x} - \underline{\gamma}\underline{\mu} - \underline{\beta} + \frac{1}{2}\underline{\sigma}^2)' (\underline{\gamma}^2 \underline{\Theta} + \underline{\Sigma})^{-1} \cdot (\log \underline{x} - \underline{\gamma}\underline{\mu} - \underline{\beta} + \frac{1}{2}\underline{\sigma}^2) \right\}$$

$$(x_i > 0, -\infty < \mu_i < \infty; \gamma_i < \infty, \sigma_i > 0, \underline{\Theta} > 0, \underline{\Sigma} > 0).$$

$$\text{Dus } \underline{X} \sim \text{MLON}(p, \underline{\gamma}\underline{\mu} + \underline{\beta} - \frac{1}{2}\underline{\sigma}^2, \underline{\gamma}^2 \underline{\Theta} + \underline{\Sigma}).$$

Opmerking 6.1

(a) Die meervariante uitbreiding van stelling 2.2 volg soortgelyk.

(b) Gestel $\underline{h}' = (h_1, \dots, h_p)$ waar $h_i \geq 0, 1 \leq i \leq p$. Die momente van $\underline{X}$ in (6.1) is

$$E \prod_{i=1}^p x_i^{h_i} = \exp \left((\underline{h}'\underline{\mu} + \underline{h}'\underline{\beta} - \frac{1}{2}\underline{h}'\underline{\sigma}^2 + \frac{1}{2}\underline{h}'(\underline{\gamma}^2 \underline{\Theta} + \underline{\Sigma})\underline{h}) \right) \\ (\text{Jones \& Miller}^8)$$

(c) Laat $\underline{X}, \underline{\gamma}\underline{\mu} + \underline{\beta} - \frac{1}{2}\underline{\sigma}^2$ en $\underline{\gamma}^2 \underline{\Theta} + \underline{\Sigma}$ in (6.1) soos volg opgedeel word:

$$\underline{X}: p \times 1 = \begin{bmatrix} \underline{X}_1: k \times 1 \\ \underline{X}_2: (p-k) \times 1 \end{bmatrix},$$

$$\underline{\gamma}\underline{\mu} + \underline{\beta} - \frac{1}{2}\underline{\sigma}^2 = \begin{bmatrix} \underline{\gamma}\underline{\mu}_{(1)} + \underline{\beta}_{(1)} - \frac{1}{2}\underline{\sigma}_{(1)}^2: p \times 1 \\ \underline{\gamma}\underline{\mu}_{(2)} + \underline{\beta}_{(2)} - \frac{1}{2}\underline{\sigma}_{(2)}^2: (p-k) \times 1 \end{bmatrix}$$

en

$$\underline{\gamma}^2 \underline{\Theta} + \underline{\Sigma} = \begin{bmatrix} \underline{\gamma}^2 \underline{\Theta}_{11} + \underline{\Sigma}_{11}: k \times k & \underline{\gamma}^2 \underline{\Theta}_{12} + \underline{\Sigma}_{12}: k \times (p-k) \\ \underline{\gamma}^2 \underline{\Theta}_{21} + \underline{\Sigma}_{21}: (p-k) \times k & \underline{\gamma}^2 \underline{\Theta}_{22} + \underline{\Sigma}_{22}: (p-k) \times (p-k) \end{bmatrix}.$$

Nou volg dat

$$\underline{X}_1 \sim \text{MLON}(k, \gamma \underline{\mu}_{(1)} + \underline{\beta}_{(1)} - \frac{1}{2} \underline{\sigma}_{(1)}^2, \gamma^2 \Theta_{11} + \Sigma_{11})$$

en

$$\begin{aligned} \underline{X}_1 | \underline{X}_2 = \underline{x}_2 \sim & \text{MLON}(k, \gamma \underline{\mu}_{(1)} + \underline{\beta}_{(1)} - \frac{1}{2} \underline{\sigma}_{(1)}^2 \\ & + (\gamma^2 \Theta_{12} + \Sigma_{12})(\gamma^2 \Theta_{22} + \Sigma_{22})^{-1} \\ & (\log \underline{x}_2 - \gamma \underline{\mu}_{(2)} - \underline{\beta}_{(2)} + \frac{1}{2} \underline{\sigma}_{(2)}^2), \gamma^2 \Theta_{11} + \Sigma_{11} \\ & - (\gamma^2 \Theta_{12} + \Sigma_{12})(\gamma^2 \Theta_{22} + \Sigma_{22})^{-1}(\gamma^2 \Theta_{21} + \Sigma_{21})) \end{aligned}$$

- (d) Indien $\underline{Z} = \underline{X} + \underline{\alpha}$ dan besit die verdeling van $\underline{Z}$ die vorm van die veralgemeende meervariante lognormaalverdeling, maar met meer parameters.

VERWYSINGS

1. Aitchison, J. & Brown, J. A. C. (1957). *The lognormal distribution* (Cambridge: University Press).
2. Siehel, H. S. (1973). Statistical valuation of diamondiferous deposits, *Journal of the South African Institute of Mining and Metallurgy*, vol. 73, 235-243.
3. Van der Merwe, C. A. (1976). *Statistiese modelle vir inkomsteverdelings*. Ongepubliseerde D.Com.-proefskrif, Universiteit van Suid-Afrika.
4. Pearson, K. (1902). On the influence of natural selection on the variability and correlation of organs, *Phil. Transactions*, 200A.
5. Johnson, N. L. & Kotz, S. (1970). *Continuous univariate distributions - I* (Boston: Houghton Mifflin Company).
6. Patil, G. P. et al. (1984a). *Dictionary and classified bibliography of statistical distributions in scientific work. Vol. 2: Continuous Univariate Models* (Fairland: International Co-operative Publishing House).
7. Patil, G. P. et al. (1984b). *Dictionary and classified bibliography of statistical distributions in scientific work. Vol. 3: Multivariate models* (Fairland: International Co-operative Publishing House).
8. Jones, R. M. & Miller, K. S. (1966). On the multivariate lognormal distribution, *The Journal of the Industrial Mathematics Society*, vol. 16, 63-76.