Swakprojektiewe oordekkings vir linker R-module

A. Esterhuyse
Departement Wiskunde, Universiteit van Stellenbosch, Stellenbosch 7600

Ontvang 1 November 1988; aanvaar 9 Julie 1989

UITTREKSEL

Die paar (P, ϕ), P 'n linker R-moduul en ϕ 'n epimorfie, word 'n projektiewe oordekking van 'n linker R-moduul M genoem as vir die eksakte ry

$$P \xrightarrow{\phi} M \to 0$$

geld dat P projektief is en ker ϕ klein is in P. Alle nodige definisies word in die inleidende paragraaf gegee. Aangesien nie elke linker R-moduul 'n projektiewe oordekking het nie (anders as in die geval van injektiewe omhulsels), word daar in hierdie artikel gekyk na die moontlikheid om 'n verswakte projektiewe oordekking te formuleer. In paragraaf 2 word die begrip swakprojektiewe oordekkings van linker R-module gedefinieer en ontwikkel. In paragraaf 3 word dié begrip vergelyk met die reeds bestaande een van kwasiprojektiewe oordekkings.[4,11] *Daar word byvoorbeeld aangetoon dat die kwasiprojektiewe oordekking wat verkry kan word uit 'n bestaande projektiewe oordekking niks meer is nie as 'n swakprojektiewe oordekking [Stelling 3.4].*

ABSTRACT

Weakly-projective covers for left R-modules

We call the pair (P, ϕ) where P is a left R-module and ϕ an epimorphism a projective cover for a left R-module M if in the exact sequence

$$P \xrightarrow{\phi} M \to 0$$

P is projective and ker ϕ is small in P. All the necessary definitions are given in the introduction. Since it is not true that every left R-module possesses a projective cover, as is the case with injective hulls, it is the aim of this paper to consider a weakened form of a projective cover. In section 2 the concept of a weakly-projective cover is defined and developed. In section 3 this concept is compared with that of a quasi-projective cover.[4,11] *For example it is shown that in the case where a quasi-projective cover can be obtained from an existing projective cover, this quasi-projective cover is nothing more than a weakly-projective cover [Theorem 3.4].*

1. INLEIDING

In hierdie artikel is alle ringe onder bespreking assosiatief en elkeen besit 'n eenheidselement. Alle module is unitale linkermodule. Die doel van die artikel is om die begrip van 'n swakprojektiewe oordekking vir linkermodule te formuleer en te ontwikkel, en dan te vergelyk met die reeds bekende begrip van 'n kwasiprojektiewe oordekking. Hoewel die meeste van die begrippe en definisies goed bekend is, word dit ter wille van die ontwikkeling van die onderwerp volledigheidshalwe weer gegee. Die simbool J(R) word gebruik om die Jacobson-radikaal van 'n ring R aan te dui en die simbool $\ell_R(M)$ word gebruik om die annuleerder in die ring R van 'n linker R-moduul M aan te dui. In wat volg, sal ons deurgaans bloot van 'n moduul M praat wanneer ons 'n linker R-moduul bedoel, tensy die ring R spesifieke eienskappe besit. Met die simbool $\mathrm{End}_R(P)$ word die ring van R-endomorfieë van 'n R-moduul P bedoel.

1.1 Definisies

(1) 'n R-moduul M word projektief relatief tot 'n R-moduul N genoem as die volgende diagram met eksakte ry en enige homomorfie ϕ

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "\phi"] \arrow[dl, dashed] & \\ N \arrow[r] & K \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

voltooi kan word om te kommuteer soos aangedui.

(2) 'n Moduul M word projektief genoem as dit projektief relatief tot elke linker R-moduul is.

(3) M is kwasiprojektief as dit projektief relatief tot homself is.

(4) M is swakprojektief as M projektief is as 'n $R/\ell_R(M)$-moduul.

(5) 'n Ondermoduul N van M word klein of oorbodig genoem (Engels: superfluous) as uit $N + K = M$ volg dat $K = M$.

(6) Die paar (P, ϕ) word 'n projektiewe oordekking van M genoem as in die eksakte ry

$$P \xrightarrow{\phi} M \to 0$$

geld dat P projektief is en ker ϕ klein is in P. Meestal, tensy daar 'n moontlikheid van verwarring is, sal ons bloot sê P is 'n projektiewe oordekking van M.

Dit is 'n bekende feit dat, anders as in die geval van injektiewe omhulsels, nie elke linker R-moduul 'n projektiewe oordekking het nie. So byvoorbeeld het 'n eindige Abelse groep, gesien as $\mathbb{Z}$-moduul, nie 'n projektiewe oordekking in die kategorie van $\mathbb{Z}$-module nie. Die feit dat nie elke moduul 'n projektiewe oordekking het nie, het aanleiding gegee tot ondersoeke na veralgemenings van die begrip projektiewe oordekking. Hiermee word bedoel dat as 'n moduul M nie 'n projektiewe oordekking het nie, M moontlik 'n P-projektiewe oordekking het waar die begrip P-projektief 'n egte veralgemening van die begrip projektief is.[4,8,10,11] In hierdie artikel word die begrip swakprojektiewe oordekking geformuleer en ontwikkel (paragraaf 2). In paragraaf 3 word die begrip vergelyk met dié van 'n kwasiprojektiewe oordekking.

2. SWAKPROJEKTIEWE OORDEKKINGS

2.1 Definisie

Die paar (P, ϕ) word 'n swakprojektiewe oordekking van M genoem as vir die eksakte ry

$$P \xrightarrow{\phi} M \rightarrow 0$$

geld dat

(i) P swakprojektief is;
(ii) ker ϕ klein is in P, en
(iii) vir geen $0 \neq K \subseteq \ker \phi$ geld dat P/K swakprojektief is nie.

In effek beteken dit dat gegee 'n eksakte ry

$$P \xrightarrow{\phi} M \rightarrow 0$$

met P nie noodwendig projektief nie, maar wel swakprojektief en ker ϕ klein in P, dan is (P, ϕ) 'n projektiewe oordekking van M in die kategorie van $R/\ell_R(P)$-module. Dat M ook 'n $R/\ell_R(P)$-moduul is, volg uit die feit dat $\ell_R(P) \subseteq \ell_R(M)$. Dit is verder duidelik dat ϕ ook 'n $R/\ell_R(P)$-homomorfie is. Die omgekeerde hiervan geld in die algemeen nie. Dit is naamlik nie so dat 'n projektiewe oordekking (P, ϕ) in die kategorie van $R/\ell_R(P)$-module noodwendig 'n swakprojektiewe oordekking in die kategorie van R-module sal wees nie. Kyk in dié verband na voorbeeld 2.5(2) wat later volg.

Dat swakprojektiewe oordekkings bestaan, word gewaarborg deur stelling 2.4 wat later volg. Met die nodige aanpassings is die bewys wesenlik dieselfde as dié van stelling 2.6 in [11].[11] Die volgende twee lemmas, wat direk volg uit onderskeidelik proposisies 2.2 en 2.1 in [11][11] en stelling 2.3 in [6],[6] word vir die bewys van stelling 2.4 benodig.

2.2 Lemma

As M *swakprojektief is en 'n projektiewe oordekking* (P, ϕ) *het, dan is* ker ϕ *'n* R-End$_R$(P)*-ondermoduul van* P.

2.3 Lemma

As die ry $0 \rightarrow K \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$ *eksak is met* P *projektief en* K *'n* R-End$_R$(P)*-ondermoduul van* P, *dan is* M *kwasiprojektief.*

Ons merk op dat as P 'n projektiewe oordekking is, dan kan ons kwasiprojektief hierbo vervang met swakprojektief.[6]

2.4 Stelling

As M *'n projektiewe oordekking het, dan het* M *'n swakprojektiewe oordekking wat uniek is tot op 'n isomorfie na.*

Bewys

Sê $P \xrightarrow{\pi} M \rightarrow 0$ is 'n projektiewe oordekking vir M. Laat X die (unieke) maksimale R-End$_R$(P)-ondermoduul van P wees wat vervat is in ker π. Die bestaan van X word gewaarborg deur Zorn se lemma en die uniekheid volg uit die feit dat die som van twee R-End$_R$(P)-ondermodule wat in kern π bevat is, ook in ker π bevat is. Beskou nou die volgende eksakte ry

$$P \xrightarrow{\phi} P/X \rightarrow 0.$$

Aangesien $X \subseteq \ker \pi$ en ker π klein is in P volg dat X klein is in P sodat (P, ϕ) 'n projektiewe oordekking is vir P/X. Volgens lemma 2.3 is P/X kwasiprojektief en volgens die opmerking daarna is P/X swakprojektief. Die res van die bewys is nou dieselfde as dié van proposisie 2.6 in [11].[11]

2.5 Voorbeelde

(1) Dit is bekend dat 'n eindige Abelse groep as $\mathbb{Z}$-moduul nie 'n projektiewe oordekking het nie. So byvoorbeeld is in die volgende eksakte ry van $\mathbb{Z}$-module

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\phi} Z_5 \rightarrow 0$$

$\mathbb{Z}$ projektief, maar ker ϕ is nie klein in $\mathbb{Z}$ nie. Maar as $\mathbb{Z}$-moduul het Z_5 wel 'n swakprojektiewe oordekking, want in die volgende eksakte ry

$${}_{\mathbb{Z}}Z_5 \xrightarrow{\pi} {}_{\mathbb{Z}}Z_5 \rightarrow 0$$

is ${}_{\mathbb{Z}}Z_5$ swakprojektief en ker π klein in Z_5. Die derde eis van die definisie word triviaal bevredig.

(2) Beskou die volgende eksakte ry van $\mathbb{Z}$-module

$$Z_{16} \xrightarrow{\phi} Z_2 \rightarrow 0$$

Hoewel Z_{16} swakprojektief is en ker ϕ klein in Z_{16} is Z_{16} nie 'n swakprojektiewe oordekking vir Z_2 nie, want $Z_{16}/\ker \phi \cong Z_2$ wat swakprojektief is.

2.6 Stelling

'n Eksakte ry van R-module,

$$P \xrightarrow{\phi} M \rightarrow 0$$

met P *swakprojektief en* ker ϕ *klein in* P *is 'n swakprojektiewe oordekking as en slegs as* $\ell_R(M) = \ell_R(P)$.

Bewys

Sê $P \xrightarrow{\phi} M \rightarrow 0$ is 'n swakprojektiewe oordekking. Ons hoef slegs te bewys dat $\ell_R(M) \subseteq \ell_R(P)$. Ons bewys eers dat ker ϕ geen egte nie-nul End$_R$(P)-ondermoduul bevat nie. Aanvaar die teendeel. Sê dus dat $0 \neq K \subseteq \ker \phi$ 'n End$_R$(P)-ondermoduul van P is. Beskou die volgende diagram met eksakte ry en enige homomorfie α

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[d, "\mathrm{nat}"] & \\
 & P/K \arrow[d, "\alpha"] & \\
P^A \arrow[r, "(\pi\ \mathrm{nat})"] & (P/K)^A \arrow[r, "\theta"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

waar A enige indeksversameling is.

Aangesien P swakprojektief is, is dit projektief relatief tot P^A vir elke versameling A. Dus bestaan daar 'n homomorfie $\bar{\alpha}$: $P \rightarrow P^A$ sodanig dat

$$\theta(\pi \text{ nat})\bar{\alpha} = \alpha \text{ nat}.$$

Definieer nou α': $P/K \rightarrow (P/K)^A$ soos volg:

$$\alpha'(p + K) = \bar{\alpha}p + K^A.$$

Aangesien K 'n $\mathrm{End}_R(P)$-ondermoduul van P is, is $\bar{\alpha}K \subseteq K^A$ sodat α' goed gedefinieer is.

Nou is
$$\begin{aligned} 0\alpha'(p + K) &= \theta(\bar{\alpha}p + K^A) \\ &= 0((\pi \text{ nat})\bar{\alpha}(p)) \\ &= \alpha \text{ nat}(p) \\ &= \alpha(p + K). \end{aligned}$$

Dus P/K is swakprojektief wat strydig is met die feit dat $P \xrightarrow{\phi} M \rightarrow 0$ 'n swakprojektiewe oordekking is. Dus ker ϕ bevat geen nie-nul $\mathrm{End}_R(P)$-ondermoduul nie. Maar $\ell_R(M).P$ is 'n $\mathrm{End}_R(P)$-ondermoduul van P want sê α: $P \rightarrow P$, dan is $\alpha(\ell_R(M).P) = \ell_R(M)\alpha P \subseteq \ell_R(M).P$. Verder is $\ell_R(M).P \subseteq \ker\phi$ want $\phi(\ell_R(M).P) = \ell_R(M).\phi(P) = \ell_R(M).M = 0$. Dus volg dat $\ell_R(M).P = 0$ sodat $\ell_R(M) \subseteq \ell_R(P)$.

Sê omgekeerd dat $\ell_R(M) = \ell_R(P)$. Laat $\theta \neq K \subseteq \ker\phi$ só wees dat P/K swakprojektief is. Dus P/K is projektief as $R/\ell_R(P/K)$-moduul. Maar $\ell_R(P/K) = \ell_R(P)$. Dit volg só: sê $r \in \ell_R(P/K)$, dan is $K = r(p + K) = rp + K$ sodat $rp \in K$. Dus $0 = \phi(rp) = r\phi(p) = rm$ sodat $r \in \ell_R(M) = \ell_R(P)$. Dus $\ell_R(P/K) \subseteq \ell_R(P)$. Sê, omgekeerd, dat $r \in \ell_R(P)$. Dan is $r(p + K) = rp + K = K$ want $rp = 0$. Dus $\ell_R(P/K) = \ell_R(P)$. Dus P/K is projektief as 'n $R/\ell_R(P)$-moduul.

Stel $\bar{R} = R/\ell_R(P)$. In die kategorie van $\bar{R}$-module het ons dus die volgende twee eksakte rye

$${}_{\bar{R}}P \xrightarrow{\phi} {}_{\bar{R}}M \rightarrow 0$$

en

$${}_{\bar{R}}P/K \xrightarrow{\theta} {}_{\bar{R}}M \rightarrow 0$$

waar $\theta(p + K) = \phi(p)$. Ons wil bewys dat $({}_{\bar{R}}P/K, \theta)$ 'n projektiewe oordekking van M is.

Ons bewys eers dat $\ker\theta = \ker\phi/K$. Sê dus $p + K \in \ker\theta$. Dan is $0 = \theta(p + K) = \phi(p)$ sodat $p \in \ker\phi$ en $p + K \in \ker\phi/K$. As, omgekeerd, $p + K \in \ker\phi/K$, dan is $\theta(p + K) = \phi(p) = 0$ sodat $\ker\theta = \ker\phi/K$. Nou volg dat ker θ klein is in P/K.[1] Dus volg dat in die kategorie van $\bar{R}$-module beide (P, ϕ) en $(P/K, 0)$ projektiewe oordekkings vir M is. Dus $P/K \cong P$ as $\bar{R}$-module en dus ook as R-module. Dus $K = 0$ en P 'n swakprojektiewe oordekking van M.

Gevolg 1

Sê $P \xrightarrow{\phi} M \rightarrow 0$ is 'n swakprojektiewe oordekking. Dan is M self swakprojektief as en slegs as M projektief relatief tot P^A is vir elke indeksversameling A.[3]

Gevolg 2

As $P \xrightarrow{\phi} M \rightarrow 0$ 'n swakprojektiewe oordekking is, dan is P projektief relatief tot M.[3]

Hoewel die klas van module wat swakprojektiewe oordekkings het, groter is as die klas wat projektiewe oordekkings het, bestaan daar module wat nie swakprojektiewe oordekkings het nie. Vir 'n voorbeeld sien [11].[11]

Verder ontstaan die vraag of dit nie dalk net die swakprojektiewe module is wat hul eie swakprojektiewe oordekkings is nie. Só byvoorbeeld het geen R-moduul M waarvoor geld dat $\ell_R(M) = J(R)$ 'n swakprojektiewe oordekking nie, tensy M self swakprojektief is. Dit volg só: Sê vir 'n moduul M geld dat $\ell_R(M) = J(R)$. Dan is $R/\ell_R(M) = R/J(R)$ en $J(R/J(R)) = 0$.[1] Sê nou M het 'n swakprojektiewe oordekking

$$P \xrightarrow{\phi} M \rightarrow 0.$$

Dan is $\ell_R(P) = \ell_R(M) = J(R)$. Ons het dan 'n eksakte ry van $\bar{R} = R/J(R)$ module met ${}_{\bar{R}}P$ projektief en ker ϕ klein in P. Maar dit is strydig met [1],[1] p. 203. Om 'n voorbeeld te kan gee van 'n moduul wat nie self swakprojektief is nie, maar wel 'n swakprojektiewe oordekking het, benodig ons die volgende lemma.

2.7 Lemma

As $C = A \oplus B$ *swakprojektief is, dan is beide* A *en* B *swakprojektief.*

Bewys

Laat $R^* = R/\ell_R(C)$. As C swakprojektief is, is sowel A as B projektief as R^*-module. Aangesien $\ell_R(C) \subseteq \ell_R(A)$ is $\ell_R(A)/\ell_R(C) \subseteq \ell_{R^*}(A)$ want sê $r + \ell_R(C) \in \ell_R(A)/\ell_R(C)$ en $a \in A$. Dan is $(r + \ell_R(C))a = ra = 0$ want $r \in \ell_R(A)$. Laat $I^* = \ell_R(A)/\ell_R(C)$. Volgens [1][1] p. 191 is A projektief as 'n $R^*/I^* \cong R/\ell_R(A)$-moduul. Dus A is swakprojektief; en net so ook B.

Die omgekeerde van lemma 2.7 geld nie in die algemeen nie. So byvoorbeeld is sowel Z_2 as Z_4 swakprojektief, maar $Z_2 \oplus Z_4$ is nie. Stel $K = Z_2 \oplus Z_4$, dan is $\ell_{\mathbf{Z}}(K) = \ell_{\mathbf{Z}}(Z_2) \cap \ell_{\mathbf{Z}}(Z_4) = 4\mathbf{Z}$ sodat $\mathbf{Z}/\ell_{\mathbf{Z}}(K) \cong Z_4$. Maar K is nie as Z_4-moduul projektief nie, want as K as Z_4-moduul projektief is, dan is Z_2 dit ook.

Beskou egter die volgende diagram van Z_4-module

$$\begin{tikzcd} & Z_2 \arrow[d, "1_{Z_2}"] & \\ Z_4 \arrow[r, "\theta"] & Z_2 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

met $\theta(1) = 1$. As α: $Z_2 \rightarrow Z_4$ 'n homomorfie is, dan is $\alpha(1) = 0$ of $\alpha(1) = 2$, maar in nie een van die gevalle is die diagram dan kommutatief nie.

Aangesien $J(\mathbf{Z}) = 0$ het K nie 'n projektiewe oordekking nie. K het wel 'n swakprojektiewe oordekking naamlik

$$Z_4 \oplus Z_4 \xrightarrow{\phi} Z_2 \oplus Z_4 \rightarrow 0.$$

Hier is $Z_4 \oplus Z_4$ swakprojektief, ker ϕ is klein in $Z_4 \oplus Z_4$ en $\ell_{\mathbf{Z}}(Z_4) \oplus Z_4) = \ell_{\mathbf{Z}}(Z_2) \oplus Z_4)$ sodat uit stelling 2.6 volg dat $(Z_4 \oplus Z_4, \phi)$ 'n swakprojektiewe oordekking is. Uit die voorafgaande blyk dat gegee 'n versameling linker R-module $\{M_i\}_{i \in I}$ met swakprojektiewe oordekkings $(P_i, \phi_i)_{i \in I}$, dan geld in die algemeen nie, soos die geval is met projektiewe oordekkings, dat $\bigoplus_{i \in I} P_i$ die swakprojektiee oordekking van $\bigoplus_{i \in I} P_i$ is nie. Wat ons wel sal aantoon, is dat die volgende geld.

2.8 Stelling

Laat (P_1, ϕ_1) *en* (P_2, ϕ_2) *swakprojektiewe oordekkings wees van* M_1 *en* M_2 *respektiewelik. Dan is*

$$P_1 \oplus P_2 \xrightarrow{\phi_1 \oplus \phi_2} M_1 \oplus M_2 \rightarrow 0$$

'n swakprojektiewe oordekking as en slegs as daar 'n swakprojektiewe moduul Q *bestaan sodanig dat* $Q \cong P_1 \oplus P_2$ *en met* P_1 *projektief relatief tot* P_2^A *en* P_2 *projektief relatief tot* P_1^A *vir elke indeksversameling* A.

Dat die stelling geld, sal later aangetoon word. Die vraag wat dus aan die orde is, is gegee dat A en B swakprojektiewe linker R-module is, onder watter omstandighede sal geld dat $A \oplus B$ swakprojektief is?

2.9 Stelling

Laat A en B direkte sommande wees van 'n linker R-*moduul* C. *Dan is die volgende ekwivalent.*

(a) C *is swakprojektief.*

(b) (i) A *en* B *is beide swakprojektief, en*

(ii) A *is projektief relatief tot* B^I *en* B *is projektief relatief tot* A^I, *vir elke indeksversameling* I.

Bewys

(a) ⇒ (b). Laat $\bar{R} = R/\ell_R(C)$. B is as $\bar{R}$-moduul projektief en volgens lemma 3.8 van [10][10] is B projektief relatief tot $C^I \cong A^I \oplus B^I$.Beskou die volgende diagram met eksakte ry en homomorfieë.

$$\begin{tikzcd} & & B \arrow[dll, dashed, "\psi"'] \arrow[d, "\phi"] \\ A^I \oplus B^I \arrow[r, "\pi"] & A^I \arrow[r, "\beta"] & K \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Definieer nou $\psi': B \rightarrow A^I$ sodat $\psi' = \pi\psi$. Dan is $\beta\psi' = \phi$. Soortgelyk volg dat A projektief relatief tot B^I is.

(b) ⇒ (a). A swakprojektief en A projektief relatief totB^I impliseer dat A projektief relatief tot $A^I \oplus B^I$ is.[6] Netso is B projektief relatief tot $A^I \oplus B^I$. Nou volg dat $A \oplus B$ projektief relatief tot $A^I \oplus B^I \cong (A \oplus B)^I$ is sodat $A \oplus B$ swakprojektief is.

Dat stelling 2.8 geld, volg nou direk uit stelling 2.9. Die volgende eksakte ry sal dus 'n swakprojektiewe oordekking wees

$$Z_6 \xrightarrow{\phi} Z_2 \oplus Z_3 \rightarrow 0.$$

3. SWAKPROJEKTIEWE OORDEKKINGS VERSUS KWASIPROJEKTIEWE OORDEKKINGS

3.1 Definisie

Die paar (Q, ϕ) word 'n kwasiprojektiewe oordekking van die R-moduul M genoem as vir die eksakte ry

$$Q \xrightarrow{\phi} M \rightarrow 0$$

geld dat

(i) Q kwasiprojektief is;

(ii) ker ϕ klein is in Q, en

(iii) vir geen $0 \neq K \subseteq \ker \phi$ geld dat Q/K kwasiprojektief is nie.

Dit is bekend dat projektiwiteit 'n egte veralgemening is van die begrip swakprojektiwiteit. Tog is 'n projektiewe oordekking van 'n moduul M nie sonder aanpassings 'n swakprojektiewe oordekking nie [2.4]. Aangesien kwasiprojektiwiteit 'n egte veralgemening van die begrip swakprojektiwiteit is, sou ons kon vermoed dat 'n swakprojektiewe oordekking ook nie sonder meer 'n kwasiprojektiewe oordekking is nie. Dat dit nie die geval is nie, volg uit die volgende stellings.

3.2 Stelling

As $P \xrightarrow{\phi} M \rightarrow 0$ *'n swakprojektiewe oordekking is, dan is* (P, ϕ) *'n kwasiprojektiewe oordekking.*[4]

3.3 Stelling

As $Q \xrightarrow{\phi} M \rightarrow 0$ *'n kwasiprojektiewe oordekking is, dan geld dat* $\ell_R(Q) = \ell_R(M)$.[4]

Die omgekeerde van stelling 3.2 geld nie. In die besonder geld dit nie vir module wat kwasiprojektief is, maar nie swakprojektief nie.[3] Dat sodanige module nie ook swakprojektiewe oordekkings het nie, volg uit die volgende stelling.

3.4 Stelling

As 'n moduul M *'n swakprojektiewe oordekking* $P \rightarrow M \rightarrow 0$ *het sowel as 'n kwasiprojektiewe oordekking* $Q \rightarrow M \rightarrow 0$, *dan is* $P \cong Q$.

Bewys

Volgens stelling 3.2 is P ook 'n kwasiprojektiewe oordekking en weens die uniekheid van kwasiprojektiewe oordekkings geld dat $P \cong Q$.

Gevolg

As R 'n perfekte ring is, dan is elke kwasiprojektiewe oordekking wat uit elke R-moduul M se projektiewe oordekking gevorm kan word,[11] niks meer nie as 'n swakprojektiewe oordekking.

Verder geld ook dat as M eindig voortgebring is en begrens[3] is deur $X \subseteq M$, X eindig, dan is 'n kwasiprojektiewe oordekking $Q \rightarrow M \rightarrow 0$ niks meer nie as 'n swakprojektiewe oordekking.[4] Kyk verder in [4][4] vir nog voorbeelde van kwasiprojektiewe oordekkings wat ook swakprojektiewe oordekkings is. Vir ander gevalle waar kwasiprojektief en swakprojektief saamval[3] geld dit natuurlik ook.

Dit is bekend dat as $P \xrightarrow{\phi} M \rightarrow 0$ 'n projektiewe oordekking is en M is kwasiprojektief, dan is M ook swakprojektief.[6] Dit kan nou uitgebrei word na kwasiprojektiewe module wat nie projektiewe oordekkings het nie, maar wel swakprojektiewe oordekkings.

3.5 Stelling

As 'n kwasiprojektiewe moduul M *'n swakprojektiewe oordekking*

$$P \rightarrow M \rightarrow 0$$

het, dan is $M \cong P$.

Net so geld dat as 'n swakprojektiewe moduul M 'n kwasiprojektiewe oordekking

$$Q \rightarrow M \rightarrow 0$$

het, dan is $M \cong Q$.

3.6 Stelling

'n Kwasiprojektiewe oordekking $Q \rightarrow M \rightarrow 0$ *is 'n swakprojektiewe oordekking as en slegs as Q projektief relatief tot* M^A *is vir elke versameling* A.

ISSN 0254-3486 = *S.A. Tydskrif vir Natuurwetenskap en Tegnologie* **8**, no. 3 1989

Bewys
Aangesien $\ell_R(Q) = \ell_R(M)$ volg dat Q projektief relatief tot M^A is as en slegs as Q projektief relatief tot Q^A is.[3]

3.7 Stelling
As vir 'n ring R *geld dat elke linker* R*-moduul 'n kwasiprojektiewe oordekking het, dan is dié oordekkings swakprojektiewe oordekkings.*

Bewys
As elke R-moduul 'n kwasiprojektiewe oordekking het, dan is R links perfek.[6] Volgens stelling 2.4 het elke R-moduul dan 'n swakprojektiewe oordekking wat volgens stelling 3.4 isomorf moet wees aan die gegewe kwasiprojektiewe oordekking.

VERWYSINGS

1. Anderson, F. W. & Fuller, K. R. (1974). *Rings and Categories of Modules* (Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin).
2. Benader, A. C. (1986). 6*-projective covers and 6-artinian rings, *Journal for Pure and Applied Algebra*, 42, 15-23.
3. Esterhuyse, A. (1978). *Module en hul Annuleerders*, Ph.D proefskrif (RAU).
4. Faticoni, T. G. (1983). On quasiprojective covers, *Transactions of the Amer. Math. Soc.*, 278(1), 101-113.
5. Fuller, K. R. (1969). On direct representations of quasi-injectives and quasiprojectives, *Archiv der Mathematik*, 20, 495-502.
6. Fuller, K. R. & Hill, D. A. (1970). On quasiprojective modules via relative projectivity, *Archiv der Mathematik*, 21, 369-373.
7. Hill, D. A. (1974). Restricted homological properties of modules, *J. Austral. Math. Soc.*, 18, 170-181.
8. Nakahara, S. (1983). On a generalization of semiperfect modules, *Osaka J. Math.*, 20, 43-50.
9. Sandomierski, F. L. (1969). On semi-perfect and perfect rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, (21), 205-207.
10. Varadarajan, (1976). M-projective and strongly M-projective modules, *Illinois J. Math.*, 20(3), 507-515.
11. Wu, L. E. T. & Jans, J. P. (1967). On quasiprojectives, *Illinois J. Math.*, 11, 439-448.