ISSN 0254-3486 = *S.A. Tydskrif vir Natuurwetenskap en Tegnologie* 8, no. 1 1989

Navorsings- en oorsigartikels

'n Terugblik op die Quillen-Suslin-stelling en die huidige status van die Bass-Quillen-vermoede

A.A. Lemmer* en G. Naudé
Departement Wiskunde, Universiteit van Pretoria, Pretoria 0002

Ontvang 28 Junie 1988; aanvaar 23 Julie 1988

UITTREKSEL

In sy beroemde FAC-artikel het J.P. Serre die vraag geopper of alle eindigvoortgebringde projektiewe module oor $K[X_1,\ldots,X_n]$ (K 'n liggaam) vry is of nie. Die probleem het spoedig in die wiskundegemeenskap bekend gestaan as "Serre se vermoede" en is in 1976 onafhanklik deur A.A. Suslin en D. Quillen bewys. Verwante belangrike ontwikkelinge het veral uit die idees in Quillen se bewys gevolg.

In hierdie artikel bespreek ons die meetkundige motivering van die oorspronklike probleem, asook enkele aspekte van Quillen se bewys. Daarna word aandag gegee aan van die belangrikste verdere ontwikkelinge, onder meer 'n bewys dat eindigvoortgebringde projektiewe module oor $R[X_1,\ldots,X_n]$, R 'n Bezout-gebied, vry is. Ons gee ook aandag aan nuwe resultate oor die bestaan van vry sommande in projektiewe module. Die werk gee in die geval van polinoomringe 'n aansienlike verskerping van Serre se beroemde vryesommandstelling: As R 'n Noetherse ring is en P is 'n eindigvoortgebringde projektiewe R-moduul met rang P > dim R, dan besit P 'n vry, rangeensommand. Ten slotte bespreek ons die huidige stand van die belangrikste oop probleem in dié gebied, naamlik die Bass-Quillen-vermoede: As R 'n regulier-lokale ring is, is alle eindigvoortgebringde projektiewe $R[X_1,\ldots,X_n]$-module vry?

ABSTRACT

A glance back at the Quillen-Suslin theorem and the recent status of the Bass-Quillen conjecture

In his famous FAC-article J.P. Serre asked whether all finitely generated projective modules over $K[X_1,\ldots,X_n]$ (K a field) are free. This question soon became known in the mathematical society as "Serre's Conjecture". This conjecture was proved independently in 1976 by A.A. Suslin and D. Quillen. Important further developments followed from the ideas in Quillen's proof.

In this article we discuss the geometric motivation of the original problem as well as certain aspects of Quillen's proof. Then we discuss further developments, in particular a proof that finitely generated projective modules over $R[X_1,\ldots,X_n]$, R a Bezout domain, are free. We also give attention to new results on the existence of free summands in projective modules. In the case of polynomial rings, this work strengthens Serre's famous free summand theorem: if R is a Noetherian ring and P is a finitely generated projective R-module such that rank P > dim R, then there exists a free rank one summand in P. Finally we discuss the present status of the most important open problem in this field, namely the Bass-Quillen Conjecture: if R is a regular local ring, is every finitely generated projective $R[X_1,\ldots,X_n]$-module free?

1. INLEIDING

In 1955 het Jean-Pierre Serre se beroemde artikel "Faisceaux algebriques coherents", waarin hy die moderne gerfteoretiese benadering in algebraïese meetkunde ingevoer het, in die "Annals of Mathematics" verskyn.[26] In dié artikel meld hy ook dat dit nie bekend is of alle eindigvoortgebringde projektiewe module oor $K[X_1,\ldots,X_n]$, K 'n liggaam, vry is of nie. Die vraag of eindigvoortgebringde projektiewe module oor $K[X_1,\ldots,X_n]$ vry is, het spoedig in die wiskundegemeenskap as Serre se "vermoede" bekend gestaan en het tot verskeie belangrike ontwikkelinge in algebra aanleiding gegee. Die name van veral H. Bass (met die ontwikkeling van algebraïese K-teorie), D. Quillen en A. A. Suslin kan in die verband genoem word. In Januarie 1976 is Serre se "vermoede" dan ook onafhanklik deur Quillen[23] en Suslin[28] bevestig.

Dit is interessant om vandag, meer as tien jaar na Quillen en Suslin se bewyse, terug te kyk na die ontwikkelinge rondom die resultaat en in die huidige artikel gee ons so 'n terugblik. Veral Quillen se idees in sy oplossing van die probleem, het geblyk om seminaal te wees in uitbreidings van die resultaat na die gevalle van eindigvoortgebringde projektiewe module oor polinoomringe met 'n meer algemene koëffisiëntring. Ons gee dan ook 'n kort skets van Quillen se bewys nadat ons meetkundige motiverings van die aanvanklike probleem bespreek het. Daarna gee ons aandag aan nie-Noetherse uitbreidings van die resultaat, asook die verband tussen die Quillen-Suslin-stelling en nuwe ontwikkelinge aangaande 'n stelling

*Outeur aan wie korrespondensie gerig kan word

van Serre oor die bestaan van vry sommande in projektiewe module. Ons sluit af met 'n bespreking van die Bass-Quillen-vermoede, wat vandag waarskynlik die belangrikste oop probleem in dié gebied is.

Ons verwys die geïnteresseerde leser na Lam[10] vir 'n volledige bespreking van die Quillen-Suslin-stelling. Die nie-Noetherse uitbreidings volg uit Lequain en Simis.[12] Die huidige artikel is gedeeltelik gebaseer op die M.Sc.-verhandeling van die eerste outeur.[11]

Ons verfris vervolgens die leser se geheue aangaande sommige basiese begrippe en resultate.

'n Moduul M oor 'n ring R is vry indien M isomorf is aan die som van kopieë van die ring R, dit wil sê $M \cong \oplus R$. M is projektief indien dit 'n sommand is van 'n vry moduul, dit wil sê daar bestaan 'n moduul N só dat $M \oplus N \cong \oplus R$. Enige vry moduul is dus projektief, maar die omgekeerde geld nie noodwendig nie. 'n Eenvoudige voorbeeld van 'n projektiewe moduul wat nie vry is nie, kry ons oor die ring Z_6 van heelgetalle modulo 6. Ons het naamlik $Z_6 \cong Z_2 \oplus Z_3$ as Z_6-module sodat Z_2 (en Z_3) projektief is, maar Z_2 kan duidelik nie isomorf wees aan Z_6 of 'n som van kopieë van Z_6 nie.

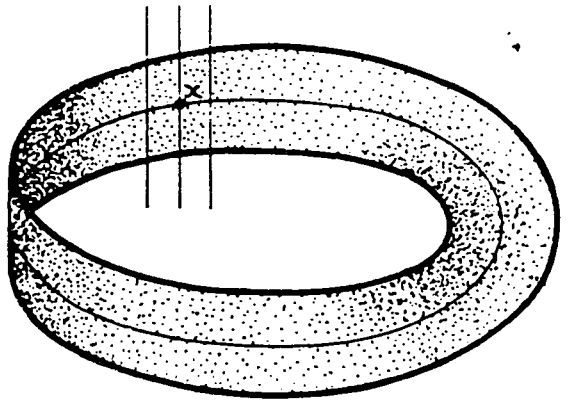
Dit volg maklik uit die fundamentele stelling van Abelse groepe dat enige eindigvoortgebringde projektiewe Abelse groep vry is en die bewys veralgemeen direk na die geval van eindigvoortgebringde projektiewe module oor hoofideaalgebiede. In die besonder is eindigvoortgebringde projektiewe module oor K[X], K 'n liggaam, dus vry.

'n Baie dieper resultaat van Bass lui dat as R 'n Noetherse ring is, dan is enige projektiewe R-moduul wat nie eindigvoortgebring is nie, vry (mits R nie nietriviale idempotente elemente bevat nie).[1] In die besonder is projektiewe $K[X_1,\ldots,X_n]$-module wat nie eindigvoortgebring is nie, vry.

2. DIE VERBAND TUSSEN PROJEKTIEWE MODULE EN VEKTORBUNDELS

Benewens die feit dat dit uit 'n algebraïese oogpunt 'n natuurlike vraag is om te vra of alle eindigvoortgebringde projektiewe module oor $K[X_1,\ldots,X_n]$ vry is, is die probleem ook uit 'n meetkundige oogpunt van besondere belang. Ons bespreek kortliks twee meetkundige aspekte van die probleem, naamlik die verband tussen projektiewe module en vektorbundels (in hierdie paragraaf) asook die implikasies op die probleem van volledige deursnedes in algebraïese meetkunde (in paragraaf 3).

Ons bespreek eers topologiese vektorbundels. 'n Meer volledige maar elementêre bespreking van dié begrippe kan bv. in Pfeffer[21] gevind word. 'n Vektorbundel op 'n topologiese ruimte X is 'n familie van eindigdimensionale vektorruimtes wat op 'n kontinue wyse geïndekseer is deur die elemente van X. Byvoorbeeld, as V 'n eindigdimensionale vektorruimte oor die reële getalle is, dan is $X \times V = \cup \{x\} \times V$ 'n vektorbundel. Vektorbundels van die vorm "$X \times V$" word triviaal genoem. As $X = S^1$ (die eenheidsirkel in $\mathbb{R}^2$) en $V = \mathbb{R}$, dan is $X \times V = S^1 \times \mathbb{R}$ 'n silinder. 'n Nie-triviale voorbeeld van 'n vektorbundel op S^1 kan verkry word as ons die vektorruimtes $\mathbb{R}$ beskou as vasgeplak op 'n Moëbius-band (kyk figuur 1).



FIGUUR 1: Moëbius-band as vektorbundel.

'n Welbekende stelling van Swan beweer dat vektorbundels op 'n (kompakte Hausdorff) ruimte X bijektief ooreenkom met eindigvoortgebringde projektiewe module oor die ring C(X) van kontinue (reëelwaardige) funksies.[30] Verder, onder hierdie ooreenkoms kom triviale bundels ooreen met vry module.

Die vraag of elke vektorbundel op 'n ruimte X 'n triviale bundel is, is dus ekwivalent aan die vraag: "Is elke eindigvoortgebringde projektiewe moduul oor die ring C(X) 'n vry moduul?"

In die geval waar $X = \mathbb{R}^n$ is die antwoord positief en wel om die volgende rede: 'n Saamtrekbare topologiese ruimte is 'n ruimte wat kontinu vervorm kan word tot 'n enkele punt. In die besonder is $\mathbb{R}^n$ saamtrekbaar, (terwyl die gebied tussen twee konsentriese sirkels in $\mathbb{R}^2$ nie saamtrekbaar is nie).

Vektorbundels bly invariant (tot op isomorfie na) onder 'n kontinue vervorming van die onderliggende topologiese ruimte en aangesien die enigste vektorbundel op 'n ruimte bestaande uit 'n enkele punt, die triviale bundel is, volg dit dat daar slegs triviale bundels op $\mathbb{R}^n$ is. Aan die hand van Swan se Stelling volg dus dat alle eindigvoortgebringde projektiewe module oor $C(\mathbb{R}^n)$ vry is.

Algebraïese vektorbundels word analoog aan topologiese vektorbundels gedefinieer, maar die indeksversameling is nou 'n algebraïese versameling en die indeksering geskied deur polinoomfunksies in plaas van kontinue funksies.

Die analoog van die topologiese ruimte $\mathbb{R}^n$ is die algebraïese versameling $A^n(K)$ (genoem die n-dimensionale affiene ruimte oor 'n algebraïese geslote liggaam K), wat bestaan uit al die n-talle $(a_1,\ldots,a_n)$, $a_i \in K$.

Daar is ook 'n analoog van Swan se Stelling (bewys deur Serre in sy 1955 artikel[26] waarvolgens daar 'n bijeksie tussen algebraïese vektorbundels oor $A^n(K)$ en eindigvoortgebringde projektiewe module oor $K[X_1,\ldots,X_n]$ bestaan, sodanig dat triviale bundels korrespondeer met vry module.

Die vraag of eindigvoortgebringde projektiewe module oor $K[X_1,\ldots,X_n]$, vry is, is dus ekwivalent aan die vraag of algebraïese vektorbundels oor $A^n(K)$ vry is. Soos ons gesien het, is die analoë bewering

waar in die topologiese geval en die vermoede het ontstaan dat dit in die algebraïese geval ook waar is.

3. DIE VERBAND TUSSEN SERRE SE VERMOEDE EN DIE PROBLEEM VAN VOLLEDIGE DEURSNEDES

Ons bespreek vervolgens die probleem van volledige deursnedes in meetkunde. Meer besonderhede kan in Lam[10] en Ohm[20] gevind word. Om die bespreking te vereenvoudig beperk ons ons tot die komplekse ruimte $\mathbb{C}^3$behalwe vir enkele illustrasies in $\mathbb{R}^2$.

Gegee 'n polinoom $F \in \mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]$, dan noem ons $P = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{C}^3$ 'n nulpunt van F as $F(a_1, a_2, a_3) = 0$. Die versameling V(F) van alle nulpunte van F word 'n vlak genoem.

Meer algemeen: as S enige versameling van polinome in $\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]$ is, dan definieer ons

$$V(S) = \bigcap_{F \in S} V(F).$$

'n Versameling van die vorm $V(S) \subseteq \mathbb{C}^3$ heet 'n algebraïese versameling.

'n Mens kan maklik sien dat $V(S) = V(\langle S \rangle)$, waar $\langle S \rangle$ die ideaal voortgebring deur S is. Dus, enige algebraïese versameling is van die vorm V(I) waar I 'n ideaal van $\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]$ is. Dit kan verder bewys word dat priemideale van $\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]$ bijektief ooreenkom met onontbindbare algebraïese versamelings, dit wil sê met algebraïese versamelings wat nie geskryf kan word as die vereniging van kleiner algebraïese versamelings nie. Onder die bijeksie kom 'n maksimale ideaal $\langle X_1 - a_1, X_2 - a_2, X_3 - a_3 \rangle$ met die punt $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{C}^3$ ooreen, terwyl die onontbindbare oppervlakke $V(\langle F \rangle)$ ooreenkom met minimale nie-nul priemideale, dit wil sê priemideale van hoogte een. Onontbindbare krommes is algebraïese versamelings wat ooreenkom met priemideale van hoogte twee.

Om op te som het ons die volgende situasie:

$\mathbb{C}^3$	$\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]$
punte $\longleftrightarrow$	maksimale ideale (= priemideale van hoogte drie)
krommes $\longleftrightarrow$	priemideale van hoogte twee
oppervlakke $\longleftrightarrow$	priemideale van hoogte een.

Ons gee enkele illustrasies van krommes in $\mathbb{R}^2$.

Die punte op 'n kromme kan in twee klasse verdeel word, naamlik dié waar die kromme "glad" is en die sogenaamde "singuliere" punte, byvoorbeeld (0,0) in figuur 2.

Ons het die volgende ringteoretiese karakterisering van nie-singuliere punte op 'n kromme. Laat m die maksimale ideaal wees wat met die punt P op 'n V(I) ooreenkom. P is 'n nie-singuliere punt op V(I) as (en slegs as) die gelokaliseerde ring $(\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]/I)_m$ se maksimale ideaal deur 'n enkele element voortgebring kan word. Ons noem die kromme V(I) nie-singulier as al sy punte nie-singulier is.

As ons twee oppervlakke $V(\langle f_1 \rangle)$ en $V(\langle f_2 \rangle)$ in $\mathbb{C}^3$ beskou, dan sal hul deursnede in die algemeen 'n algebraïese versameling wees:

$$V(\langle f_1 \rangle) \cap V(\langle f_2 \rangle) = V(\langle f_1, f_2 \rangle).$$

Indien $\langle f_1, f_2 \rangle$ 'n priemideaal is, is $V(\langle f_1, f_2 \rangle)$ dus 'n kromme wat die snyding is van twee oppervlakke. So byvoorbeeld is
$I = \langle X_1^2 - X_2^3, X_2^2 - X_3^3 \rangle$ 'n priemideaal van hoogte twee en $V(I) = V(\langle X_1^2 - X_2^3, X_2^2 - X_3^3 \rangle)$. Die probleem van volledige deursnedes is nou om te bepaal watter krommes die snyding van presies twee oppervlakke is. Die algebraïese formulering is: watter priemideale van hoogte twee kan deur presies twee elemente voortgebring word? (Die twee formulerings is nie presies ekwivalent nie. 'n Bespreking van die onderwerp kan in Kunz[9] gevind word.)

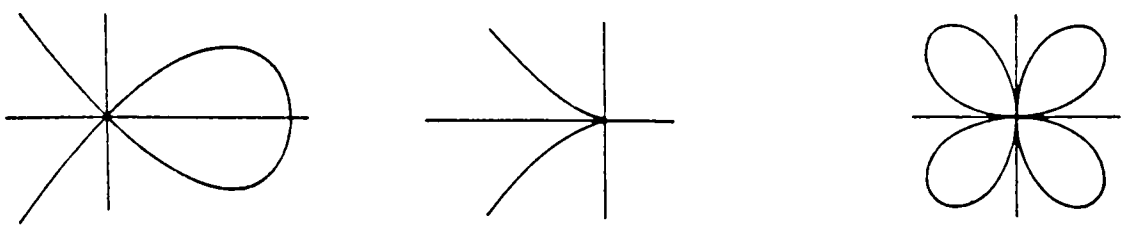
Dit kan aangetoon word dat die ideaal
$J = \langle X_1X_3 - X_2^2, X_2X_3 - X_1^3, X_3^2 - X_1^2X_2 \rangle$ in die ring $\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]$ 'n hoogte twee priemideaal is wat nie deur twee elemente voortgebring kan word nie.

Macaulay[17] het voorbeelde gekonstrueer van hoogte twee priemideale wat 'n willekeurige gegewe aantal voortbrengers nodig het. Hierdie voorbeelde se algebraïese krommes het almal 'n singuliere punt by die oorsprong gehad. Gevolglik gaan ons ons aandag dus beperk tot nie-singuliere krommes.

Die verband tussen die probleem van volledige deursnedes en Serre se vermoede is nou die volgende: Serre het aangetoon dat vir enige hoogte twee priemideaal P daar 'n eksakte ry

$$0 \to R \to E \to P \to 0, \text{ met } R = \mathbb{C}[X_1, X_2, X_3],$$

bestaan met E 'n projektiewe R-moduul van rang twee. As eindigvoortgebringde projektiewe module oor $\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]$ nou vry is, is $E \cong R^2$ en P word deur twee elemente voortgebring. Aan die hand van die Quillen-Suslin-stelling kan ons dus aflei dat enige nie-singuliere kromme in $\mathbb{C}^3$ die snyding van presies twee oppervlakke is.



$\vartheta(X^3 - X^2 + Y^2) \subseteq \mathbb{R}^2$ $\vartheta(X^3 + Y^2) \subseteq \mathbb{R}^2$ $\vartheta((X^2 + Y^2)^2 - 4X^2Y^2) \subseteq \mathbb{R}^2$

FIGUUR 2: Algebraïese versamelings.

4. 'N BEWYS VAN DIE QUILLEN-SUSLIN-STELLING

In hierdie afdeling gee ons 'n kort uiteensetting van 'n bewys van die Quillen-Suslin-stelling. Die bewys volg in breë trekke dié van Quillen (sien ook die uiteensetting in Kunz).[9]

'n Belangrike resultaat in die bewys is 'n stelling van Horrocks in algebraïese meetkunde. Sedert die resultaat deur Quillen in sy bewys gebruik is, is algebraïese weergawes van die resultaat deur verskeie persone gegee (Lindel,[13] Swan[31]). In algebraïese vorm is Horrocks se Stelling in wese 'n stelling oor (kommutatiewe) lokale ringe.

4.1 Horrocks se Stelling

Gestel R is 'n lokale ring en P 'n eindigvoortgebringde projektiewe R[X]-moduul. As daar 'n moniese polinoom $f \in R[X]$ bestaan, sodanig dat P_f 'n vry $R[X]_f$-moduul is, dan is P 'n vry R[X]-moduul.

Die moontlikheid om dié resultaat na willekeurige ringe uit te brei, is deur Bass[2] genoem en is deur Quillen en Suslin bewys.

4.2 Stelling (Quillen, Suslin)

Gestel R is 'n kommutatiewe ring en P is 'n eindigvoortgebringde projektiewe R[X]-moduul. As daar 'n moniese polinoom $f \in R[X]$ bestaan sodanig dat P_f 'n vry $R[X]_f$-moduul is, dan is P 'n vry R[X]-moduul.

As R en S ringe is met $R \subseteq S$, dan noem ons 'n S-moduul M uitgebrei vanaf R indien daar 'n R-moduul M_0 bestaan, sodanig dat $M = M_0 \otimes_R S$. Ons merk op dat as M uitgebrei is vanaf 'n vry moduul M_0, dan is M ook vry. Quillen gebruik die volgende lokaal-globale resultaat in sy bewys van stelling 4.4.

4.3 Stelling (Quillen se "Patching Theorem")

Laat R 'n kommutatiewe ring en laat M 'n eindiggepresenteerde $R[X_1,\ldots,X_n]$-moduul wees. Dan is M uitgebrei vanaf R as (en slegs as) vir elke maksimale ideaal m van R, die $R[X_1,\ldots,X_n]_m$-moduul M_m uitgebrei vanaf R_m is.

(Hier dui M_m die lokalisering van M met betrekking tot die multiplikatief geslote versameling $R-m$ in $R[X_1,\ldots,X_n]$ aan. M is eindiggepresenteer indien $M \cong F/K$ met F eindigvoortgebring vry en K eindigvoortgebring.)

Suslin se bewys van stelling 4.3 gebruik tegniese maar meer elementêre eienskappe van elementêre transformasies van verdelende monomorfismes.

Met stelling 4.3 tot ons beskikking is die bewys van die Quillen-Suslin-stelling nou relatief eenvoudig.

4.4 Die Quillen-Suslin-stelling

As K 'n hoofideaalgebied is, dan is alle eindigvoortgebringde projektiewe $K[X_1,\ldots,X_n]$-module vry.

Skets van bewys: Die bewys geskied deur induksie op die aantal onbepaaldes. Die geval $n = 0$ is slegs die bekende resultaat dat eindigvoortgebringde projektiewe module oor 'n hoofideaalgebied vry is.

Gestel $n > 0$ en die resultaat is reeds bewys vir polinoomringe in $n-1$ onbepaaldes. Laat M 'n eindigvoortgebringde projektiewe $K[X_1,\ldots,X_n]$-moduul, en S die versameling van alle moniese polinome in $K[X_1]$ wees. 'n Mens kan aantoon dat $S^{-1}K[X_1]$ weer 'n hoofideaalgebied is.[9]

Nou is $S^{-1}M$ 'n projektiewe moduul oor $(S^{-1}K[X_1])[X_2,\ldots,X_n]=S^{-1}K[X_1,\ldots,X_n]$. Uit die induksiehipotese volg dat $S^{-1}M$ 'n vry $S^{-1}K[X_1,\ldots,X_n]$-moduul is. Volgens 'n bekende resultaat (sien byvoorbeeld Gevolg 2.17[10]) bestaan daar 'n $f \in S$ sodanig dat M_f 'n vry $K[X_1,\ldots,X_n]_f$-moduul is en dit volg direk uit stelling 4.2 dat M 'n vry $K[X_1,\ldots,X_n]$-moduul is.

5. NIE-NOETHERSE UITBREIDINGS VAN DIE QUILLEN-SUSLIN-STELLING

Verskeie persone het na 1976 gepoog om die Quillen-Suslin-stelling te veralgemeen na meer algemene koëffisiëntringe. In hierdie paragraaf gee ons aandag aan 'n nie-Noetherse veralgemening, naamlik die geval waar die kwosiëntring 'n Bezout-gebied is, terwyl Noetherse veralgemenings in paragraaf 7 bespreek word.

'n Bezout-gebied is 'n gebied met die eienskap dat elke eindigvoortgebringde ideaal 'n hoofideaal is. Enige Bezout-gebied R het die eienskap dat R_m 'n valuasiegebied is vir alle maksimale ideale m van R.

In dié paragraaf skets ons 'n bewys deur Lequain en Simis[12] van die volgende resultaat.

5.1 Stelling

Gestel R is 'n Bezout-gebied. Dan is alle eindigvoortgebringde projektiewe module oor $R[X_1,\ldots,X_n]$ vry.

Dieselfde resultaat, maar met die addisionele aanname dat R ook eendimensionaal is, kan ook in Brewer[4] en Maroscia[16] gevind word.

Deur gebruik te maak van Quillen se stelling 4.3 en die feit dat eindigvoortgebringde projektiewe module oor 'n Bezout-gebied vry is, sien ons dat stelling 5.1 direk sal volg uit die volgende resultaat.

5.2 Stelling

Laat R 'n valuasiegebied wees. Dan is alle eindigvoortgebringde projektiewe module oor $R[X_1,\ldots,X_n]$ uitgebrei vanaf R (en dus vry).

Ons skets vervolgens die bewys van stelling 5.2. Eerstens kan aangetoon word dat dit voldoende is om die resultaat te bewys in die geval waar R eindigdimensionaal is.

Die bewys van die stelling berus vervolgens op die volgende resultate.

(a) As R 'n gebied is met eindig veel priemideale, dan kan die maksimale spektrum mspec R[X] soos volg geskryf word:

$$\text{mspec } R[X] = \bigcup_{i=1}^{k} Y_i, \dim Y_i \leq 1.$$

(b) (Serre se Stelling). Gestel S is 'n ring waarvan die maksimale spektrum soos hierbo geskryf kan

word. As M 'n eindigvoortgebringde projektiewe moduul oor S is met rang M > 1, dan bevat M 'n vry, rang een sommand: $M \cong R \oplus M'$ (vergelyk §6 vir die oorspronklike vorm van Serre se Stelling).

(c) As T 'n gebied is met die eienskap dat enige twee elemente van T 'n grootste gemene deler het, dan is enige rang een projektiewe moduul oor T vry. Die bewys van stelling 5.2, met R eindigdimensionaal, geskied nou soos volg:

Laat M enige eindigvoortgebringde moduul oor R[X] wees. Aangesien R 'n eindigdimensionale valuasiegebied is, het R slegs eindig veel priemideale en volgens (a) geld

$$\text{mspec } R[X] = \bigcup_{i=1}^{k} Y_i, \dim Y_i \leqslant 1.$$

Deur herhaalde toepassing van (b) volg dat $M \cong R^t \oplus M_1$ met M_1 van rang een. Dit is nou 'n bekende feit dat enige twee elemente van R[X] 'n grootste gemene deler het en uit (c) volg dit dus dat M_1 vry is. Dus is M ook vry.

Die res van die bewys volg nou deur (nie-triviale) induksie op die aantal onbepaaldes.

6. NUWE ONTWIKKELINGE RONDOM 'N STELLING VAN SERRE

Van die belangrikste (en diepste) resultate wat oor die struktuur van projektiewe module oor polinoomringe handel, kan as 'n verskerping van die volgende beroemde stelling van J.P. Serre beskou word.

Gestel R is 'n Noetherse ring en P 'n eindigvoortgebringde projektiewe R-moduul. As rang P > dim R, dan bevat P 'n vry, rangeensommand: $P \cong R \oplus P'$.

H. Bass[2] het die vraag geopper of die volgende bewering waar is al dan nie:

(B) As $R = A[X_1, \ldots, X_n]$, met A 'n Noetherse ring, en P is 'n eindigvoortgebringde projektiewe R-moduul met rang P > dim A, dan bevat P 'n vry, rang een sommand.

'n Positiewe antwoord op die vraag sou natuurlik die Quillen-Suslin-stelling impliseer: as k 'n liggaam is, dan is dim k = 0 sodat vir enige P geld dat rang P > 0. Enige P kan dus, deur herhaalde toepassing van (B), geskryf word as 'n som van rang een vry module. Derhalwe is P vry.

Eisenbud en Evans[6] het bewys dat (B) geld indien A semi-lokaal van positiewe dimensie is en hulle spreek die vermoede uit dat (B) geld vir n = 1.[5]

Dié geval is dan ook deur B. Plumstead bewys.[22] Gedeeltelike verdere resultate is deur verskeie outeurs verkry, maar (B) is uiteindelik deur S.M. Bhatwadekar en A. Roy bewys.[3] Die idees van Plumstead, wat 'n sterk meetkundige inslag het, figureer wesentlik in die bewys. Ons kan nou ook uit (B) aflei dat enige eindigvoortgebringde projektiewe moduul oor $A[X_1, \ldots, X_n]$, A Noethers, die som is van 'n projektiewe moduul van rang kleiner of gelyk aan die dimensie van A, en 'n vry moduul.

7. DIE BASS-QUILLEN-VERMOEDE

In hierdie afdeling bespreek ons 'n uitbreiding van die Quillen-Suslin-stelling na polinoomringe met Noetherse koëffisiëntringe, in die besonder, na reguliere ringe.

Gestel I is 'n priemideaal van hoogte een in die ring $\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]$, dit wil sê I is 'n priemideaal wat met 'n onontbindbare kromme in $\mathbb{C}^3$ ooreenkom. In ons bespreking van singuliere en nie-singuliere punte op 'n kromme (§3) het ons gesien dat 'n punt P op die kromme nie-singulier is indien die maksimale ideaal van die ring $R = (\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]/I)_m$ (waar m die maksimale ideaal is wat met P ooreenkom) deur 'n enkele element voortgebring kan word. Aangesien I van hoogte een is, is R se Krull-dimensie gelyk aan een. R is dus 'n Noetherse lokale ring met dié eienskap dat die minimale aantal voortbrengers van sy maksimale ideaal gelyk is aan sy Krull-dimensie.

In die algemeen noem ons 'n Noetherse lokale ring R regulier indien sy maksimale ideaal deur dim R-elemente voortgebring kan word. 'n Noetherse ring S heet regulier indien al die lokale ringe S_m, m 'n maksimale ideaal van S, regulier is. Soos verwag kan word, kom reguliere lokale ringe voor in die bestudering van nie-singuliere punte op 'n algebraïese versameling (moontlik van dimensie meer as een).

In 'n artikel oor probleme in klassieke algebraïese K-teorie, het Bass[2] in 1972 gevra of die volgende bewering waar is:

(BQ) As R 'n (kommutatiewe) reguliere ring van eindige dimensie is, is elke eindigvoortgebringde projektiewe $R[X_1, \ldots, X_n]$-moduul uitgebrei vanaf R.

Aangesien 'n positiewe antwoord op bogenoemde bewering 'n positiewe antwoord op Serre se vermoede impliseer, het Bass gesê dat dit dalk beter sou wees om die probleem te benader deur 'n teenvoorbeeld te soek.

Quillen het bogenoemde bewering vir R 'n kommutatiewe reguliere ring weer geopper met sy bewys van Serre se vermoede. Met behulp van Quillen se stelling 4.3 volg dat Bass se probleem ekwivalent is aan die volgende probleem:

(BQ') As R 'n reguliere lokale ring van eindige dimensie is, is elke eindigvoortgebringde projektiewe $R[X_1, \ldots, X_n]$-moduul vry.

Die bewering, of sy ekwivalente vorm, staan in die literatuur bekend as die Bass-Quillen-vermoede en ons sluit af met 'n kort bespreking van die belangrikste literatuur oor dié probleem.

Dit is bekend dat BQ' waar is vir R 'n reguliere lokale ring van dimensie $\leqslant 2$.[8] Die dimensie-een-geval volg natuurlik direk uit die Quillen-Suslin-stelling, aangesien 'n lokale hoofideaalgebied regulier lokaal is.

Mohan-Kumar[18] het bewys dat BQ' waar is vir R, die ring van formele magreekse of die ring van konvergente magreekse in eindig veel onbepaaldes oor 'n liggaam. Eersvermelde resultaat is ook bewys deur Lindel saam met Lütkebohmert.[14]

Benewens werk deur Suslin[29] is uitgebreide navorsing deur H. Lindel oor die Bass-Quillen-vermoede gedoen en verskeie belowende resultate is deur hom verkry.[15] Verdere positiewe resultate is ook onlangs deur M. Roitman gepubliseer.[25]

In 1987 het Rao[24] aangetoon, vir die geval n = 1, dat BQ' waar is vir R, 'n reguliere lokale ring van dimensie $\leqslant 3$.

Verwysings

1. Bass, H. (1963). Big projective modules are free, *Ill. J. Math.*, 7, 24-31.
2. Bass, H. (1972). Some problems in "classical" algebraic K-theory, in Algebraic K-theory II, *Lecture Notes in Mathematics*, 342, (Springer-Verlag), pp. 1-70.
3. Bhatwadekar, S.M. & Roy, A. (1984). Some Theorems about Projective Modules over Polynomial Rings, *J. Algebra*, 86, 150-158.
4. Brewer, J.W. & Costa, D.L. (1978). Projective modules over some non-Noetherian polynomial rings, *J. Pure Appl. Algebra*, 13 (2), 157-163.
5. Eisenbud, D. & Evans, E.G. (Jr.) (1973). Generating modules efficiently: theorems from algebraic K-theory, *J. Algebra*, 27, 278-305.
6. Eisenbud, D. & Evans, E.G. (Jr.) (1973). Three conjectures about modules over polynomial rings, Conference on Cummutative Algebra, *Lecture Notes in Mathematics*, 311, (Springer-Verlag).
7. Horrocks, G. (1964). Vector bundles on the punctured spectrum of a local ring, *Proc. London Math. Soc.*, 14, 689-713.
8. Horrocks, G. (1964). Projective modules over an extension of a local ring, *Proc. London Math. Soc.* 14, 714-718.
9. Kunz, E. (1985). *Introduction to commutative algebra and algebraic geometry* (Birkhaüser, Boston).
10. Lam, T.Y. (1978). Serre's Conjecture, *Lecture Notes in Mathematics*, 635 (Springer-Verlag).
11. Lemmer, A.A. (1986). *The Quillen-Suslin-Theorem and a generalization to non-Noetherian domains*, MSc-verhandeling, Universiteit van Pretoria.
12. Lequain, Y. & Simis, A. (1980). Projective modules over $R[X_1,\ldots,X_n]$, R a Prüfer domain, *J. Pure App. Algebra*, 18, 165-171.
13. Lindel, H. (1977). Eine Bemerkung zur Quillenschen Lösung des Serreschen Problems, *Math. Ann.*, 230, 97-100.
14. Lindel, H. & Lütkebohmert, W. (1977). Projective Modüln über polynomialen Erweiterungen von Potenzreihenalgebren, *Archiv der Math.*, 28, 51-54.
15. Lindel, H. (1982). Algebraic K-theory, Part I, *Lecture Notes in Math.*, 966, (Springer-Verlag), pp. 169-179.
16. Maroscia, P. (1977). Modules projectifs sur certains anneaux de polynomials, *C.R. Acad. Sci.* Paris Ser A-B 285, no. 4, A 183-A185.
17. Macaulay, F.S. (1916). *Algebraic Theory of Modular Systems*, Cambridge Tracts, 19.
18. Mohan-Kumar, N. (1979). On a question of Bass and Quillen, *J. Indian Math. Soc.* (N.S.), 43, no. 1-4.
19. Murthy, M.P. (1966). Projective A[x]-modules, *J. London Math. Soc.*, 41, 453-456.
20. Ohm, J. (1980). Space curves as ideal-theoretic complete intersections, In: *Studies in Math.* 20, Math. Assoc. Amer. 47-115.
21. Pfeffer, W.F., Naudé, G. & Swart, J. (1984). *Vector bundles, Fredholm operators and Bott periodicity*, SWISK 34, CSIR.
22. Plumstead, B.R. (1983). The Conjectures of Eisenbud and Evans, *Am. J. Math.*, 105, 1417-1433.
23. Quillen, D. (1976). Projective Modules over Polynomial Rings, *Invent. Math.*, 36, 167-171.
24. Rao, R.A. (1987). Two Examples of the Bass-Quillen-Suslin Conjectures, *Math. Ann.*, 279, 227-238.
25. Roitman, M. (1986). On stably extended projective modules over polynomial rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 97 (4), 585-589.
26. Serre, J.P. (1955). Faisceaux algébriques cohérents, *Ann. of Math.*, 61, 191-278.
27. Simis, A. (1969). When are projectives free? *Queen's Papers in Pure and Appl. Math.*, 21, Queen's University, Kinston, Ontario, Canada.
28. Suslin, A.A. (1976). Projective modules over a polynomial ring are free, *Dokl. Akad. Nauk.*, SSSR 229, 1160-1164.
29. Suslin, A.A. (1980). The cancellation problem for projective modules, and related questions, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Helsinki, 1978), pp. 323-330, Acad. Sci. Fennica, Helsinki.
30. Swan, R. (1962). Vector bundles and projective modules, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 105, 264-277.
31. Swan, R. (1975). Serre's Problem, Conference on Commutative Algebra, *Queen's Papers in Pure and Appl. Math.*, 42, pp. 2-60.