

Partisies van versamelings in metriese en normeerde ruimtes geïnduseer deur konsentriese sferes en ewewydige hipervlakke

K.J. Swanepoel

Departement Wiskunde en Toegepaste Wiskunde, Universiteit van Pretoria, Pretoria 0002

Ontvang 5 Maart 1999; aanvaar 16 Augustus 1999

UITTREKSEL

'n Oordekking van 'n versameling A in 'n metriese ruimte (M, d) deur eindig veel verskillende konsentriese sferes induseer 'n partisie op A . In hierdie artikel word aangetoon dat die kardinaliteit van die versameling van sulke partisies van A nie groter as die digtheid van M (die kleinste kardinaliteit van 'n digte deelversameling van M) is nie. Hierdie bogrens is skerp vir vele interessante metriese ruimtes, soos die $L_p(\kappa)$ -ruimtes bestaande uit funksies $x: \kappa \rightarrow \mathbf{R}$ waarvoor $\sum_{\alpha \in \kappa} |x(\alpha)|^p < \infty$.

Daar word ook aangetoon dat die kardinaliteit van die versameling partisies van 'n begrensde versameling A van 'n normeerde ruimte X geïnduseer deur oordekkings van A deur eindig veel ewewydige geslote hipervlakke nie groter is as die digtheid van die dual van X in die norm-topologie nie. Die $L_p(\kappa)$ -ruimtes voorsien weer voorbeelde waar gelykheid mag geld.

ABSTRACT

Partitions of sets in metric and normed spaces induced by concentric spheres and parallel hyperplanes.

A covering of a set A in a metric space (M, d) by finitely many distinct concentric spheres induces a partition on A . In this paper it is shown that the cardinality of the set of such partitions of A is not greater than the density of M (the least cardinality of a dense subset of M). This bound is sharp for many interesting metric spaces, such as the $L_p(\kappa)$ spaces consisting of functions $x: \kappa \rightarrow \mathbf{R}$ for which

$$\sum_{\alpha \in \kappa} |x(\alpha)|^p < \infty.$$

It is also shown that the cardinality of the set of partitions of a bounded subset A of a normed space X induced by coverings of A by finitely many distinct parallel closed hyperplanes is not greater than the density of the dual of X in the norm topology. The $L_p(\kappa)$ -spaces again provide examples where equality may hold.

1. INLEIDING

Die volgende oneindige kombinatoriese telprobleem word beskou in die konteks van oordekkings van versamelings in metriese en normeerde ruimtes:

Probleemstelling Bepaal bogrense vir die aantal oordekkings van 'n versameling in 'n metriese ruimte (normeerde ruimte, respektiewelik) deur eindig veel konsentriese sferes (ewewydige hipervlakke, respektiewelik).

Hierdie probleem het sy oorsprong in 'n poging om versamelings in (oneindig-dimensionele) Euklidiese ruimtes te verstaan wat *eindig k-sferies* maar nie *k-sferies* is nie, d.w.s. elke eindige deelversameling is bevat in die vereniging van k verskillende konsentriese sferes, maar dieselfde geld nie vir die hele versameling nie.

In hierdie artikel word die probleemstelling beantwoord deur skerp bogrense te bepaal wat verrassend laag is (sien Stellings A en B hieronder).

Eindig *k-sferiese* versamelings duik op in die Euklidiese Ramsey-teorie: Die sogenaamde *k*-Ramsey versamelings in oneindig-dimensionele Euklidiese ruimtes het hierdie eienskap^{1,2,3}. Eindig hipervlakkige versamelings is 'n interessante variasie daarop, veral in die lig daarvan dat Stelling B (hieronder) net bewys kon word vir begrensde versamelings. Dit is 'n oop vraag of begrensdeheid nodig is as hipotese. Dit blyk of eindig hipervlakkige versamelings nie voorheen bestudeer is nie.

Die volgende notasie word gebruik. Dui die kardinaliteit van 'n versameling A aan met $\#A$. Met 'n partisie π van 'n versameling A word bedoel 'n klas nie-leë paargewys disjunkte deelversamelings van A wat A oordek. Die versamelings in 'n partisie π word die *blokke* van π genoem.

Met T word 'n topologiese ruimte aangedui, met M 'n metriese ruimte met metriek $d(\cdot, \cdot)$, en met X 'n (reële) normeerde ruimte met norm $\|\cdot\|$. Die basiese feite oor sulke ruimtes^{4,5} word gebruik. Die (kontinue) dual van X (met die normtopologie) word aangedui met X^* . Die digtheid $d(T)$ van 'n topologiese ruimte T is die kleinste kardinaliteit van 'n digte deelversameling van T . Die gewig $w(T)$ van T is die kleinste kardinaliteit van 'n oop basis vir die topologie van T . Dit is welbekend dat as S 'n deelruimte van T is, dan geld $w(S) \leq w(T)$, en vir metriese ruimtes geld $d(M) = w(M)$. Die sfeer met middelpunt $m \in M$ en straal $r \geq 0$ is die versameling $\Sigma(m, r) = \{x \in M \mid d(x, m) = r\}$. 'n Eindige partisie π met blokke B_1, B_2, \dots, B_k van $A \subseteq M$ is *eindig sferies* as daar $m \in M$ en $r_1, \dots, r_k \geq 0$ bestaan só dat $B_i \subseteq \Sigma(m, r_i)$ vir elke $i = 1, \dots, k$. 'n Eindige partisie π van 'n deelversameling A van 'n normeerde ruimte X is *eindig hipervlakkig* as daar 'n geslote hipervlak H van X en $v_1, \dots, v_k \in X$ bestaan só dat $B_i \subseteq v_i + H$ vir elke $i = 1, \dots, k$.

Stelling A Vir enige deelversameling A van 'n metriese ruimte M geld

$$\#\{\pi \mid \pi \text{ is 'n eindig sferiese partisie van } A\} \leq d(M).$$

Hierdie ongelykheid is 'n verskerping van die triviale bogrens $\#M$. 'n Soortgelyke opmerking geld vir die volgende stelling.

Stelling B Vir enige begrensde deelversameling A van 'n normeerde ruimte X geld

$$\#\{\pi \mid \pi \text{ is 'n eindig hipervlakkige partisie van } A\} \leq d(X^*).$$

In die volgende afdeling word 'n algemene resultaat bewys (Stelling C) waarvan Stellings A en B gevolge is. Ook word voorbeelde gegee wat aantoon dat die ongelykhede in Stellings A en B skerp is vir 'n interessante klas normeerde ruimtes.

2. DIE TEL VAN TOPOLOGIES GEDEFINIEERDE PARTISIES

Laat $C_b(T)$ die Banachruimte van reëlwaardige kontinue begrensde funksies op 'n topologiese ruimte T wees met norm $\|f\|_\infty = \sup_{x \in T} |f(x)|, f \in C_b(T)$. Die funksie $f \in C_b(T)$ word *eindig* genoem as $f(T)$ 'n eindige versameling is. Die partisie van T geïnduseer deur 'n eindige $f \in C_b(T)$ is $\pi_f = \{f^{-1}(r) \mid r \in f(T)\}$.

Die volgende stelling gee 'n bogrens vir die kardinaliteit van die versameling van partisies geïnduseer deur eindige funksies:

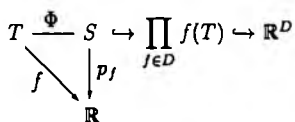
Stelling C Laat T 'n topologiese ruimte en $F \subseteq C_b(T)$ 'n versameling eindige funksies wees. Dan is $\#\{\pi_f \mid f \in F\} \leq d(F)$, waar F die deelruimtetopologie het geïnduseer deur $C_b(T)$.

Bewys Laat $P = \{\pi_f \mid f \in F\}$. Aangesien die stelling triviaal is as F 'n eindige versameling is, mag aangeneem word dat F en P oneindig is. Kies vir elke $\pi \in P$ 'n $f \in F$ sô dat $\pi = \pi_f$. Laat die versameling funksies sô gekies C wees. Dan geld $\#C = \#P$, en daar moet dus aangetoon word dat $\#C \leq d(F)$.

Kies 'n digte deelversameling D van C sô dat $\#D = d(C)$. Omdat C oneindig is, sal D ook oneindig wees. Ken die produktopologie toe aan die kartesiese produk \mathbf{R}^D , en laat $p_f: \mathbf{R}^D \rightarrow \mathbf{R}$ die kanoniese projeksie wees vir elke $f \in D$. Definieer $\Phi: T \rightarrow \mathbf{R}^D$ deur $p_f \circ \Phi = f$. Dan is

$$\Phi(T) \subseteq \prod_{f \in D} f(T) \subseteq \mathbf{R}^D.$$

Aangesien elke $f(T)$ eindig is, is $\prod_{f \in D} f(T)$ 'n kompakte versameling in \mathbf{R}^D uit Tychonoff se stelling, en dus geslote in \mathbf{R}^D . Dit volg dat $S = \overline{\Phi(T)}$ (die afsluiting van $\Phi(T)$ in \mathbf{R}^D) kompak is. Beskou nou elke p_f as beperk tot S , en beskou ook $\Phi: T \rightarrow S$. Die volgende kommutatiewe diagram word nou verkry.



Duidelik kan elke $f \in D$ deur Φ gefaktoriseer word, d.w.s. $f = p_f \circ \Phi$. Nou word aangetoon dat elke $f \in C$ deur Φ gefaktoriseer kan word, d.w.s. vir elke $f \in C$ bestaan daar 'n kontinue $q_f: S \rightarrow \mathbf{R}$ sodat $f = q_f \circ \Phi$.

Beskou die funksie $L: C_b(S) \rightarrow C_b(T); g \mapsto g \circ \Phi$. Duidelik is L 'n lineêre operator. Ook is L 'n isometrie, d.w.s. $\|Lg\|_\infty = \|g\|_\infty$ vir alle $g \in C_b(S)$. Inderdaad, aangesien $\Phi(T)$ dig is in S , volg dat

$$\|g \circ \Phi\|_\infty = \sup_{y \in \Phi(T)} |g(y)| = \sup_{y \in S} |g(y)| = \|g\|_\infty.$$

Dit volg dat $L(C_b(S))$ 'n volledige deelruimte van $C_b(T)$ is, en dus geslote is. Aangesien $D \subseteq L(C_b(S))$, word $C \subseteq L(C_b(S))$ verkry, d.w.s. elke $f \in C$ kan gefaktoriseer word deur Φ .

Kies vir elke $f \in C$ 'n $q_f \in C_b(S)$ sô dat $f = q_f \circ \Phi$. Dan is $\#C = \#\{q_f \mid f \in C\}$. Ook, vir elke $f \in C$ geld

1. $q_f(S) = f(T)$,
2. $\pi_f = \{\Phi^{-1}(A) \mid A = q_f^{-1}(r) \text{ vir 'n } r \in q_f(S)\}$,
3. elke $q_f^{-1}(r)$, waar $r \in q_f(S)$, is 'n geslote en oop deelversameling van S .

Daar is dus 'n injeksie $C \rightarrow K; f \mapsto \{q_f^{-1}(r) \mid r \in f(T)\}$, waar K die klas van eindige versamelings van geslote oop deelversamelings van S is.

Nou word aangetoon dat $\#K \leq \#D$. Die topologie van $\prod_{f \in D} f(T)$ het 'n oop basis van kardinaliteit $\#D$, en aangesien S 'n deelruimte is, is $w(S) \leq \#D$. Enige geslote oop deelversameling S is beide kompak en 'n vereniging van basiese oop versamelings, en is dus 'n eindige vereniging van basiese oop versamelings. Dus het S hoogstens $\#D$ geslote oop deelversamelings, waaruit $\#K \leq \#D$ volg.

Dus geld $\#C \leq \#K \leq \#D = d(C) \leq d(F)$ (die laaste ongelykheid volg omdat F 'n metriese ruimte is). Q.E.D.

3. BEWYS VAN STELLING A

Definieer $f_m : A \rightarrow \mathbf{R}; a \mapsto d(m, a)$ vir elke $m \in M$. As

$$F = \{f_m \mid m \in M \text{ en } f_m \text{ is eindig}\},$$

dan is $F \subseteq C_b(A)$ en volg

$$\#\{\pi \mid \pi \text{ is 'n eindig sferiese partisie van } A\} = \#\{\pi_f \mid f \in F\} \leq d(F)$$

uit Stelling C.

Laat $M' = \{m \in M \mid f_m \in F\}$. Die afbeelding $\psi : M' \rightarrow F; m \mapsto f_m$ is kontinu: Vir enige $m, m' \in M'$ geld

$$\|f_m - f_{m'}\|_\infty = \sup_{a \in A} |d(m, a) - d(m', a)| \leq d(m, m').$$

As 'n digte deelversameling D van M' gekies word s6 dat $\#D = d(M')$, dan is $\psi(D)$ dig in $\psi(M') = F$, en dus is $d(F) \leq \#\psi(D) \leq \#D$. Q.E.D

Nou word aangetoon dat gelykheid wel moontlik is in Stelling A vir $M = l_p(\kappa)$ waar κ 'n oneindige kardinaal is en $1 \leq p \leq \infty$. As $1 \leq p < \infty$, word $l_p(\kappa)$ gedefinieer as die ruimte van funksies $x : \kappa \rightarrow \mathbf{R}$ s6 dat $\sum_{\alpha \in \kappa} |x(\alpha)|^p < \infty$ met norm $\|x\|_p = (\sum_{\alpha \in \kappa} |x(\alpha)|^p)^{1/p}$. Ook word $l_\infty(\kappa)$ gedefinieer as die ruimte van funksies $x : \kappa \rightarrow \mathbf{R}$ so dat $\sup_{\alpha \in \kappa} |x(\alpha)| < \infty$ met norm $\|x\|_\infty = \sup_{\alpha \in \kappa} |x(\alpha)|$. Let op dat $d(l_p(\kappa)) = \kappa$ vir $1 \leq p < \infty$ en $d(l_\infty(\kappa)) = 2^\kappa$.

Definieer $e_\beta : \kappa \rightarrow \mathbf{R}$ vir elke $\beta \in \kappa$ deur $e_\beta(\alpha) = 1$ as $\alpha = \beta$ en $e_\beta(\alpha) = 0$ as $\alpha \neq \beta$. Dan is $B = \{e_\alpha \mid \alpha \in \kappa\}$ bevat in elke $l_p(\kappa)$, $1 \leq p \leq \infty$.

As $1 \leq p < \infty$, dan vir elke eindige nie-le6 $S \subseteq B$ is die partisie $\pi = \{S, B \setminus S\}$ eindig sferies: Laat $m = \sum_{x \in S} x$. Dan $S \subseteq \sum(m, (\#S - 1)^{1/p})$ en $B \setminus S \subseteq \sum(m, (\#S + 1)^{1/p})$. Dus is $\pi_s(B) \geq \kappa = d(l_p(\kappa))$.

As $p = \infty$, dan vir elke $S \subseteq B$, $S \neq \emptyset$, $S \neq B$ is die partisie $\pi = \{S, B \setminus S\}$ eindig sferies: Definieer $m \in l_\infty(\kappa)$ deur $m(\alpha) = 1$ as $e_\alpha \in S$ en $m(\alpha) = -1$ andersins. Dan $S \subseteq \sum(m, 1)$ en $B \setminus S \subseteq \sum(m, 2)$. Dus is $\pi_s(B) \geq 2^\kappa = d(l_\infty(\kappa))$.

4. BEWYS VAN STELLING B

Beperk elke kontinue line6re funksionaal $f \in X^*$ tot A en dui dit aan met $f_A : A \rightarrow \mathbf{R}$. Laat $F = \{f_A \mid f \in X^* \text{ en } f_A \text{ is eindig}\}$. Dan is $F \subseteq C_b(A)$, en is

$$\#\{\pi \mid \pi \text{ is 'n eindig hipervlakkige partisie van } A\} = \#\{\pi_f \mid f \in F\} \leq d(F)$$

uit Stelling C.

Aangesien d begrens is, is die afbeelding

$$\psi : \{f \in X^* \mid f_A \in F\} \rightarrow F; f \mapsto f_A$$

kontinu: Vir elke $f, f' \in X^*$ geld

$$\|f_A - f'_A\|_\infty = \sup_{a \in A} |(f - f')(a)| \leq \|f - f'\| \sup_{a \in A} |a|.$$

Die gevolgtrekking $d(F) \leq d(X^*)$ volg nou op dieselfde wyse as in die bewys van Stelling A. Q.E.D.

Om aan te toon dat gelykheid moontlik is in Stelling B, word die ruimtes $X = l_p(\kappa)$ vir $1 \leq p < \infty$ en die versameling $B = \{e_\alpha \mid \alpha \in \kappa\}$ gebruik. Dit is welbekend dat $l_1(\kappa)^*$ isometries is aan $l_\infty(\kappa)$, en vir $1 < p < \infty$ is $l_p(\kappa)^*$ isometries aan $l_q(\kappa)$ waar $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Die ruimtes $l_1(\kappa)^*$ en $l_\infty(\kappa)$ word op die standaardwyse ge6identifiseer, so ook $l_p(\kappa)^*$ met $l_q(\kappa)$.

As $p = 1$ dan vir elke $S \subseteq B$, $S \neq \emptyset$, $S \neq B$, word $f \in l_\infty(\kappa)$ gedefinieer deur $f(\alpha) = 0$ as $e_\alpha \in S$, en $f(\alpha) = 1$ andersins. Dan is $\{S, B \setminus S\} = \{f^{-1}(0), f^{-1}(1)\}$ 'n eindig hipervlakkige partisie van B , en dit volg dat $\pi_f(B) \geq 2\kappa$.

As $1 < p < \infty$, word $f \in l_q(\kappa)$ op 'n soortgelyke wyse gedefinieer, maar nou slegs vir eindige nie-le6 $S \subseteq B$. Dit volg soortgelyk dat $\pi_f(B) \geq \kappa$.

SUMMARY

The following infinite combinatorial counting problem is considered in the context of coverings of sets in metric and normed spaces.

Problem Statement Determine upper bounds for the number of partitions of a set in a metric space (normed space, respectively) by

finitely many concentric spheres (parallel hyperplanes, respectively).

This problem arose in a study of so-called k -Ramsey sets in Euclidean Ramsey theory^{1,2,3}.

In this paper an answer is provided to the problem statement by obtaining sharp upper bounds involving the density of the spaces involved. The *density* of a metric space M , denoted by $d(M)$, is the least cardinality of a dense subset.

The continuous dual of a normed space X with the norm topology is denoted by X^* . A finite partition of a subset A of a metric space is *finitely spherical* if there is a set of concentric spheres such that each block of the partition is contained in one of the spheres. A finite partition of a subset A of a normed space is *finitely hyperplanar* if there is a closed hyperplane such that each block of the partition is contained in a translate of the hyperplane.

Theorem A For any subset A of a metric space M , the cardinality of

$\{\pi \mid \pi \text{ is a finitely spherical partition of } A\}$

is at most $d(M)$.

Theorem B For any bounded subset A of a normed space X , the cardinality of

$\{\pi \mid \pi \text{ is a finitely hyperplanar partition of } A\}$

is at most $d(X^*)$.

The above bounds are sharp for many interesting metric spaces, such as the $l_p(\kappa)$ spaces consisting of functions $x : \kappa \rightarrow \mathbf{R}$ for which $\sum_{\alpha \in \kappa} |x(\alpha)|^p < \infty$, where κ is an infinite cardinal.

The above two theorems are corollaries of the following theorem on topologically defined partitions. Let $C_b(T)$ be the Banach space of continuous bounded functions on a topological space T with norm $\|f\|_\infty = \sup_{x \in T} |f(x)|$, $f \in C_b(T)$. The function $f \in C_b(T)$ is *finite* if $f(T)$ is a finite set. The partition of T induced by a finite $f \in C_b(T)$ is $\pi_f = \{f^{-1}(r) \mid r \in f(T)\}$.

Theorem C Let T be a topological space and $F \subseteq C_b(T)$ a set of finite functions. Then the cardinality of $\{\pi_f \mid f \in F\}$ is at most $d(F)$, where F has the subspace topology induced by $C_b(T)$.

LITERATUURVERWYSINGS

- 1 Erdős, P., Graham, R.L., Montgomery, P., Rothschild, B.L., Spencer, J., Straus, E.G. (1973). Euclidean Ramsey Theorems I. *J. Comb. Th. Ser. A* 14, 341–363.
- 2 Erdős, P., Graham, R.L., Montgomery, P., Rothschild, B.L., Spencer, J., Straus, E.G. (1975). Euclidean Ramsey Theorems II, in *Infinite and Finite Sets*. Hajnal, A., Rado, R. Sós, V.T. eds. (North Holland, Amsterdam) pp. 529–558.
- 3 Swanepoel, K.J. (1993). *Euclidean Ramsey Theory* (M.Sc. Dissertation, University of Pretoria).
- 4 Munkres, J.R. (1975). *Topology, A First Course* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey).
- 5 Reed, M., Simon, B. (1980). *Functional Analysis, Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. 1* (Academic Press, San Diego)



Konrad Swanepoel is 'n senior lektor in die Departement Wiskunde en Toegepaste Wiskunde aan die Universiteit van Pretoria, waar hy ook sy Ph.D -graad in Wiskunde verwerf het. Hy spesialiseer in Konvekse en Diskrete Meetkunde en die toepassings daarvan, en is die outeur van sewe spesialisartikels in hierdie gebied. Hy het 'n kursus op derdejaarsvlak ontwikkel in die Aksiomatiek van Elementêre Meetkunde, wat by die Universiteit van Pretoria aangebied word. In sy vrye tyd bestudeer hy Star Trek en die musiek van Philip Glass.