ISSN 0254-3486 = *SA Tydskrif vir Natuurwetenskap en Tegnologie* **18**, no. 3 1999

Newel-pseudotopologiese vektorruimtes

M.A. Muller
Departement Wiskunde, Universiteit van Stellenbosch, Stellenbosch, 7600

Ontvang 4 Augustus 1998; aanvaar 16 Februarie 1999

UITTREKSEL

Pseudotopologiese ruimtes (dit wil sê limietruimtes) is in 1959 deur Fischer[1] *gedefinieer. In hierdie artikel word die teorie van newel-pseudotopologiese ruimtes na vektorruimtes uitgebrei. Die begrip begrensdheid word vir newel-pseudotopologiese vektorruimtes ingevoer.*

ABSTRACT

Fuzzy Pseudo-topological Vector Spaces

Pseudo-topological spaces (i.e. limit spaces) were defined by Fischer in 1959. In this paper the theory of fuzzy pseudo-topological spaces is applied to vector spaces. We introduce the concept of boundedness in fuzzy pseudo-topological vector spaces.

1. INLEIDING

Gestel X is 'n versameling, $I = [0,1]$ en I^X is die versameling van alle funksies van X na I. 'n Newelversameling A in X word deur 'n lidmaatskapsfunksie $\mu_A \in I^X$ gekarakteriseer. Die lidmaatskapsfunksie van 'n gewone deelversameling van X is sy karakteristieke funksie. Laat $\underline{\alpha}$ die newelversameling aandui waarvan die lidmaatskapsfunksie die konstante funksie met waarde α is. 'n Newelpunt p in X is 'n newelversameling met lidmaatskapsfunksie μ_p wat sodanig is dat

$$\mu_p(x) = \begin{cases} \lambda_p \text{ as } x = x_p \\ 0 \text{ as } x \neq x_p, \end{cases}$$

waar $0 < \lambda_p < 1$. Die newelpunt $p = (x_p, \lambda_p)$ het ondersteuning x_p en waarde λ_p. 'n Newelpunt p behoort tot[7] 'n newelversameling A in X (geskryf $p \in A$) as $\mu_p(x_p) < \mu_A(x_p)$. 'n Gewone punt y word met sy karakteristieke funksie geïdentifiseer. Verder behoort y tot A as $\mu_A(y) = 1$. Met punte word in hierdie artikel beide gewone en newelpunte bedoel, en met versamelings word beide gewone en newelversamelings bedoel.

'n Klas $\mathcal{T} \subset I^X$ is 'n neweltopologie op X as

(1) $\underline{\alpha} \in \mathcal{T}$ vir alle α,
(2) $A, B \in \mathcal{T} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{T}$,
(3) $A_j \in \mathcal{T}$ vir alle $j \in J \Rightarrow \cup\{A_j : j \in J\} \in \mathcal{T}$.

Laat $\mathbf{K}$ die versameling van skalare ($\mathbf{R}$ of $\mathbf{C}$) met die gebruiklike topologie $T_\mathbf{K}$ aandui. Gestel $\mathcal{T}$ is die versameling van alle laer-semikontinue funksies van $(\mathbf{K}, T_\mathbf{K})$ in I, dit wil sê $\mathcal{T} = C((\mathbf{K}, T_\mathbf{K}), I_r)$, waar I_r die versameling I met die topologie $\{]\alpha, 1] : \alpha \in I\} \cup \{I\}$ is. Dan is $\mathcal{T}$ 'n neweltopologie en $(\mathbf{K}, \mathcal{T})$ is 'n neweltopologiese ruimte.

Na aanleiding van die idee van 'n filter in 'n verband[2] word die volgende definisie ingevoer: 'n nie-leë klas $\mathcal{F} \subset I^X$ word 'n prefilter[3] genoem as

(1) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$,
(2) $A \in \mathcal{F}$ en $A \subset B \Rightarrow B \in \mathcal{F}$,
(3) $\underline{0} \notin \mathcal{F}$.

'n Nie-leë klas $\mathcal{B}$ van deelversamelings van X word 'n basis van 'n prefilter genoem as

(1) $A, B \in \mathcal{B} \Rightarrow A \cap B \supset C$ vir 'n sekere $C \in \mathcal{B}$,
(2) $\underline{0} \notin \mathcal{B}$.

'n Prefilter $\mathcal{F}$ word deur $\mathcal{B}$ voortgebring as $\mathcal{F} = [\mathcal{B}] = \{A \in I^X : A \supset B$ vir 'n sekere $B \in \mathcal{B}\}$.

1.1 DEFINISIE[3] *As daar vir elke punt $p = (x, \lambda)$ in X 'n nie-leë versameling Δp van prefilters in X bestaan waarvoor*

(1) $\mathcal{F} \in \Delta p \Rightarrow \underline{\alpha} \in \mathcal{F}$ *vir alle* $\alpha > \lambda$,
(2) $[p] = \{A \in I^X : p \in A\} \in \Delta p$,
(3) $\mathcal{F} \in \Delta p$ *en* $\mathcal{F} \subset \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{G} \in \Delta p$,
(4) $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \Delta p \Rightarrow \mathcal{F} \cap \mathcal{G} \in \Delta p$,

dan word (X, Δ) 'n newel-pseudotopologiese ruimte genoem. As $\mathcal{F} \in \Delta p$ sê ons dat $\mathcal{F}$ na p konvergeer, ook geskryf $\mathcal{F} \to p$. (As p 'n gewone punt is, is (1) nie van toepassing nie.)

In hierdie artikel word aanvaar dat basiese eienskappe van pseudotopologiese ruimtes[1,4] asook die notasie wat algemeen in die teorie van pseudotopologiese ruimtes gebruik word, bekend is.

Gestel (X, τ) is 'n pseudotopologiese ruimte en $p = (x, \lambda)$ is 'n punt in X. Vir elke $\mathcal{F} \in \tau x$ laat $\mathcal{G}^\lambda_\mathcal{F}$ die ooreenkomstige prefilter wees wat deur die basis $\{A \in I^X : \mu_A(x) > \lambda, \mu_A(\mathcal{F}) \to \mu_A(x)$ in $I_r\}$ voortgebring word. Die geassosieerde newel-pseudotopologiese struktuur Δ_τ op X word deur $\Delta_\tau p = \{\mathcal{H} : \mathcal{H}$ is 'n prefilter in X, $\mathcal{H} \supset \mathcal{G}^\lambda_\mathcal{F}$ vir 'n sekere $\mathcal{F} \in \tau x\}$ gedefinieer. In die besonder, as $\tau_\mathbf{K}$ die gebruiklike pseudotopologiese struktuur op $\mathbf{K}$ is (dit wil sê, vir $x \in \mathbf{K}$ is $\tau_\mathbf{K} x$ die klas van alle filters in $\mathbf{K}$ wat fyner is as die omgewingsfilter van x met betrekking tot die gebruiklike topologie $T_\mathbf{K}$ op $\mathbf{K}$) word soos hierbo die geassosieerde newel-pseudotopologiese struktuur $\Delta_{\tau_\mathbf{K}}$ verkry, ook genoem die gebruiklike newel-pseudotopologiese struktuur op $\mathbf{K}$. In plaas van $\Delta_{\tau_\mathbf{K}}$ word gerieflikheidshalwe $\Delta_\mathbf{K}$ geskryf.

Gestel (X_i, Δ_i) is 'n newel-pseudotopologiese ruimte vir elke $i = 1, 2, ..., n$. Laat $X = X_1 \times ... \times X_n$ en gestel p_i is 'n punt in X_i. Dan word die newel-pseudotopologiese ruimte (X, Δ), waar Δ deur $\Delta p = \Delta(p_1, ..., p_n) = \{\mathcal{F} : \mathcal{F}$ is 'n prefilter in X met $\mathcal{F} \supset \mathcal{F}_1 \times ... \times \mathcal{F}_n$, $\mathcal{F}_i \in \Delta p_i$ vir elke $i\}$ gedefinieer word, 'n newelproduk van $(X_1, \Delta_1), ..., (X_n, \Delta_n)$ genoem. Ons herinner dat $\mathcal{F}_1 \times ... \times \mathcal{F}_n = \{A \in I^X : A \supset A_1 \times ... \times A_n, A_i \in I^{X_i}$ waar $A_i \supset B_i$ vir 'n sekere $B_i \in \mathcal{F}_i$, vir elke $i\}$ en dat $A_1 \times ... \times A_n$ 'n newelversameling met lidmaatskapsfunksie μ is, waar $\mu(x_1, ..., x_n) = \mu_{A_1}(x_1) \wedge ... \wedge \mu_{A_n}(x_n)$.

2. NEWEL-PSEUDOTOPOLOGIESE VEKTORRUIMTES

Gestel (X, Δ_1) en (Y, Δ_2) is newel-pseudotopologiese ruimtes. 'n Afbeelding $f : X \to Y$ is newelkontinu (meer presies, Δ_1-Δ_2-

newelkontinu) by 'n punt p in X as vir enige $\mathcal{F} \in \Delta_1 p$ die prefilter $f(\mathcal{F}) = [\{f(A) : A \in \mathcal{F}\}] \in \Delta_2 f(p)$. Die afbeelding f is newelkontinu as dit by elke punt van X newelkontinu is.

2.1 STELLING. *Gestel* (X_i, τ_i) *is 'n pseudotopologiese ruimte* (i = 1, 2, 3) *en* $X = X_1 \times X_2$. *Laat* τ *die produk pseudotopologiese struktuur van* τ_1 *en* τ_2 *op* X *wees en gestel dat die afbeelding* $f : (X, \tau) \to (X_3, \tau_3)$ *kontinu is. As* Δ *die produk in* X *van die geassosieerde newel-pseudotopologiese strukture* Δ_{τ_1} en Δ_{τ_2} *is, dan is* $f : (X, \Delta) \to (X_3, \Delta_{\tau_3})$ *newel-kontinu.*

Bewys. Gestel $p = (p_1, p_2)$ is 'n punt in $X_1 \times X_2$ met $p_i = (x_i, \lambda_i)$ in X_i. Dan $f(p) = (f(x_1, x_2), \lambda)$ met $\lambda = \lambda_1 \wedge \lambda_2$. Gestel $\mathcal{F} \in \Delta p$, dan $\mathcal{F} \supset \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ met $\mathcal{F}_i \in \Delta p_i$ en $\mathcal{F}_i \supset \mathcal{G}^{\lambda}_{\mathcal{H}_i}$ vir 'n sekere $\mathcal{H}_i \in \tau x_i$, ($i$ = 1,2). Laat $\mathcal{B} \in \mathcal{G}^{\lambda}_{f(\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2)}$, dan volg[5] dat $\mu_B \circ f \in \mathcal{G}^{\lambda}_{H_1 \times H_2}$ en $f(\mu_B \circ f) \leq \mu_B$. Dus $f(\mathcal{F}) \in \Delta f(p)$, gevolglik is f newelkontinu.

2.2 AFLEIDING. *Laat* (E, τ) *'n pseudotopologiese vektorruimte oor* **K** *wees. As* E *van die geassosieerde newel-pseudotopologiese struktuur* Δ_τ *voorsien word,* **K** *van die gebruiklike newel-pseudotopologiese struktuur* Δ_K, *en* $E \times E$ *en* **K** $\times E$ *van die ooreenkomstige produk newel-pseudotopologiese strukture voorsien word, dan is die afbeeldings* $E \times E \to E$ $((x, y) \to x + y)$ *en* **K** $\times E \to E$ $((\lambda, x) \to \lambda x)$ *newelkontinu.*

2.3 DEFINISIE. *'n Newel-pseudotopologiese vektorruimte is 'n vektorruimte* E *wat van 'n newel-pseudotopologiese ruimtestruktuur* Δ *voorsien word en wat sodanig is dat die afbeeldings* $E \times E \to E$ $((x, y) \to x + y)$ *en* **K** $\times E \to E$ $((\lambda, x) \to \lambda x)$ *newelkontinu is wanneer* **K** *die gebruiklike newel-pseudotopologiese struktuur* Δ_K *het, en* $E \times E$ *en* **K** $\times E$ *van die ooreenkomstige produk newel-pseudotopologiese strukture voorsien word, met ander woorde,* $\Delta p + \Delta q \subset \Delta(p + q)$ *en* $(\Delta_K \lambda)(\Delta p) \subset \Delta(\lambda p)$ *vir alle punte* $p, q \in E$ *en* $\lambda \in$ **K**.

2.4 STELLING. *Gestel* (E, Δ) *is 'n newel-pseudotopologiese vektorruimte en* α *en* y *is gewone punte in* **K** *en* E *onderskeidelik. Dan is die afbeelding* $f(x) = \alpha x$ *en* $g(x) = x + y$ *van* E *na* E *newelkontinu. As* $\alpha \neq 0$, *is* f^{-1} *newelkontinu.*

Bewys. 'n Afbeelding k van 'n newel-pseudotopologiese ruimte Y na 'n produk $X = \prod_{j \in J} X_j$ van newel-pseudotopologiese ruimtes is newelkontinu as en slegs as elke $\pi_i \circ k : Y \to X_i$ newelkontinu is, waar π_i die kanoniese projeksie[3] van X in X_i is. Aangesien die afbeeldings $h_1 : E \to \mathbf{K}$ waar $h_1(x) = \alpha$ en $h_2 : E \to E$ met $h_2(x) = x$ newelkontinu is, volg dat die afbeelding $h : E \to \mathbf{K} \times E$ waar $h(x) = (\alpha, x)$ newelkontinu is. Verder is die afbeelding $k : \mathbf{K} \times E \to E$ waar $k(\lambda, x) = \lambda x$ newelkontinu. Dus is $f = k \circ h$ newelkontinu. Op soortgelyke wyse volg dat g newelkontinu is. As $\alpha \neq 0$ volg die newelkontinuïteit van f^{-1} van die feit dat $f^{-1}(x) = \alpha^{-1}x$.

Gestel (E, Δ) is 'n newel-pseudotopologiese vektorruimte. As F 'n deelversameling van E en α 'n gewone punt van **K** is, laat αF die beeld van F onder die afbeelding $f(x) = \alpha x$ aandui. As $\alpha \neq 0$, volg

$$\mu_{\alpha F}(t) = \mu_F(\alpha^{-1}t) \text{ vir elke } t \in E,$$

en as $\alpha = 0$,

$$\mu_{\alpha F}(t) = \begin{cases} \sup\{\mu_F(y) : y \in E\} & \text{as } t = 0 \\ 0 & \text{as } t \neq 0. \end{cases}$$

As B 'n deelversameling van **K** is, en F 'n deelversameling van E is, laat BF die beeld van $B \times F$ onder die afbeelding $g(\lambda, x) = \lambda x$ aandui. Dan

$$\mu_{BF}(t) = \begin{cases} \sup\{\mu_{B \times F}(\alpha, y) : \alpha y = t\} & \text{as } g^{-1}(t) \neq \emptyset \\ 0 & \text{as } g^{-1}(t) = \emptyset. \end{cases}$$

Gestel $\mathcal{G}$ en $\mathcal{F}$ is prefilters in **K** en E onderskeidelik, $\alpha \in$ **K** en $x \in E$. Dan is $\alpha\mathcal{F}$, $\mathcal{G}\mathcal{F}$ en $\mathcal{G}x$ prefilters in E wat onderskeidelik deur die klasse $\{\alpha F : F \in \mathcal{F}\}$, $\{GF : G \in \mathcal{G}, F \in \mathcal{F}\}$ en $\{Gx : G \in \mathcal{G}\}$ van deelversamelings van E voortgebring word.

2.5 STELLING. *Gestel* U *is 'n deelversameling van 'n vektorruimte* E *en* $p \in E$. *Dan* $U - p = V$ *as en slegs as* $U = p + V$.

Bewys. Aanvaar $U - p = V$. Definieer funksies f *en* g deur $f(t) = t - p$ en $g(t) = p + t$. Aangesien $V = f(U)$ (Katsaras, Liu[6]) volg

$$\mu_V(r) = \sup\{\mu_U(s) : s \in f^{-1}(r)\} = \sup\{\mu_U(s) : s = p + r\}.$$

Aangesien $g(V) = p + V$ volg

$$\mu_{g(V)}(t) = \sup\{\mu_V(r) : r \in g^{-1}(t)\} = \sup\{\mu_V(r) : r = t - p\} = \mu_U(t).$$

Derhalwe $U = g(V) = p + V$. Die omgekeerde word soortgelyk bewys.

2.6 STELLING. *Gestel* (E, Δ) *is 'n newel-pseudotopologiese vektorruimte en* p *is 'n punt in* E. *Dan*
(1) $\alpha\Delta p \subset \Delta(\alpha p)$ *vir elke punt* α *in* **K**,
(2) $\mathcal{G}p \in \Delta(\alpha p)$ *vir elke* $\mathcal{G} \in \Delta_K \alpha$,
(3) $\Delta p = p + \Delta(p - p)$.

Bewys. (1) Gestel $\mathcal{F} \in \Delta p$. Aangesien $\{\alpha\} \in [\alpha]$ volg $\alpha F = \{\alpha\}F \in [\alpha]\mathcal{F}$ vir elke $F \in \mathcal{F}$. Dus $\alpha\mathcal{F} \subset [\alpha]\mathcal{F}$. Omgekeerd, gestel $A \in [\alpha]\mathcal{F}$. Dan bestaan $B \in [\alpha]$ en $F \in \mathcal{F}$ sodat $A \supset BF \supset \alpha F$. Dus $A \in \alpha\mathcal{F}$ en $[\alpha]\mathcal{F} \subset \alpha\mathcal{F}$. Derhalwe $\alpha\mathcal{F} = [\alpha]\mathcal{F} \in (\Delta_K\alpha)(\Delta p) \subset \Delta(\alpha p)$.
(2) Soos tevore, $\mathcal{G}p = \mathcal{G}[p] \in (\Delta_K\alpha)(\Delta p) \subset \Delta(\alpha p)$.
(3) Laat $\mathcal{F} \in \Delta p$ en laat $\mathcal{F} - p$ die prefilter wees wat deur $\{F - p : F \in \mathcal{F}\}$ voortgebring word. Dan $\mathcal{F} - p = \mathcal{F} + [-p] \in \Delta p + \Delta(-p) \subset \Delta(p - p)$. Dus $\mathcal{F} \in p + \Delta(p - p)$. Omgekeerd, as $\mathcal{H} \in p + \Delta(p - p)$ volg dat $\mathcal{H} = p + \mathcal{F} = [p] + \mathcal{F}$ vir 'n sekere $\mathcal{F} \in \Delta(p - p)$. Dan $p + \mathcal{F} \in \Delta p + \Delta(p - p) \subset \Delta(p + (p - p)) = \Delta p$, dus $\mathcal{H} \in \Delta p$.

'n Deelversameling U van 'n newel-pseudotopologiese ruimte (X, Δ) word newel-oop genoem indien vir elke punt p in U 'n ooreenkomstige $V \in \cap\{\mathcal{F} : \mathcal{F} \in \Delta p\}$ bestaan sodat $V \subset U$. As A 'n deelversameling van (X, Δ) is, word die newelsluiting $\bar{A}$ van A gedefinieer as die versameling van alle punte p in X wat sodanig is dat vir 'n sekere $\mathcal{F} \in \Delta p$, $A \cap F \neq \emptyset$ vir elke $F \in \mathcal{F}$. A word newelgeslote (of Δ-geslote) genoem as $\bar{A} = A$. Dit kan aangetoon word dat 'n deelversameling A van X newelgeslote is as en slegs as $X \setminus A$ newel-oop is.

2.7 HULPSTELLING. *As* A *'n newelgeslote deelversameling van 'n newel-pseudotopologiese vektorruimte* (E, Δ) *is, en* α *en* y *is gewone punte van* **K** *en* E *onderskeidelik* ($\alpha \neq 0$) *dan is* αA *en* $y + A$ *newelgeslote.*

Bewys. Gestel p is 'n punt in $\overline{\alpha A}$. Dan bestaan 'n sekere $\mathcal{F} \in \Delta p$ sodat $(\alpha A) \cap F \neq \emptyset$ vir elke $F \in \mathcal{F}$ Laat $\mathcal{G} = \alpha^{-1}\mathcal{F}$ dan $A \cap G \neq \emptyset$ vir elke $G \in \mathcal{G}$ en $\mathcal{G} \in \alpha^{-1}\Delta p \subset \Delta(\alpha^{-1}p)$ volgens 2.6. Dan is $\alpha^{-1}p$ 'n punt van $\bar{A}$, dus is p 'n punt van αA. Dan volg[7] dat $\overline{\alpha A} \subset \alpha A$, dus is αA newelgeslote. Op soortgelyke wyse word aangetoon dat $y + A$ newelgeslote is.

2.8 AFLEIDING. *As* U *'n newel-oop deelversameling van 'n newel-pseudotopologiese vektorruimte* (E, Δ) *is, en* α *en* y *is gewone punte van* **K** *en* E *onderskeidelik* ($\alpha \neq 0$), *dan is* αU *en* $y + U$ *newel-oop.*

Gestel (X, Δ) is 'n newel-pseudotopologiese ruimte. Die klas van alle newel-oop deelversamelings van X is 'n neweltopologie $\mathcal{T}_\Delta$ op X en word die neweltopologie genoem wat met die newel-pseudotopologiese struktuur Δ geassosieer word. 'n Newelversameling N word 'n omgewing van 'n punt p in X genoem as daar 'n newel-oop versameling U bestaan sodat $p \in U \subset N$. As p 'n punt in X is, laat $\mathcal{N}(p)$ die versameling van alle omgewings van p aandui. Vir elke p is $\mathcal{N}(p)$ 'n prefilter in X en $\mathcal{N}(p) \subset \cap\{\mathcal{F} : \mathcal{F} \in \Delta p\}$.

2.9 AFLEIDING. *As N 'n omgewing van 'n punt p in 'n newel-pseudotopologiese vektorruimte (E, Δ) is en α en y is gewone punte in* **K** *en E onderskeidelik ($\alpha \neq 0$) dan is αN en $y + N$ omgewings van αp en $y + p$ onderskeidelik.*

Die bewys van die volgende benodig 'n bekende resultaat[8,§6] en is soortgelyk aan die ooreenkomstige resultaat vir pseudotopologiese ruimtes.[1,4]

2.10 STELLING. *Gestel (X, Δ) is 'n newel-pseudotopologiese ruimte wat die volgende eienskappe het:*
(1) $\cap\{\mathcal{F} : \mathcal{F} \in \Delta p\} \in \Delta p$ vir elke punt p in X.
(2) Gegee 'n punt p en $V \in \cap\{\mathcal{F} : \mathcal{F} \in \Delta p\}$ dan bestaan $W \in \cap\{\mathcal{F} : \mathcal{F} \in \Delta p\}$ sodat $V \in \cap\{\mathcal{G} : \mathcal{G} \in \Delta q\}$ vir elke punt q in W.
Dan is $\mathcal{T}_\Delta$ die unieke neweltopologie op X wat sodanig is dat vir elke punt p, Δp die klas van alle prefilter verfynings van $\mathcal{N}(p)$ is, dit wil sê $\mathcal{N}(p) = \cap\{\mathcal{F} : \mathcal{F} \in \Delta p\}$.
Omgekeerd, as $(X, \mathcal{T})$ 'n neweltopologiese ruimte is, en as vir elke punt p in X, $\mathcal{N}_{\mathcal{T}}(p)$ die versameling van alle $\mathcal{T}$-omgewings van p in X aandui, en as $\Delta_{\mathcal{T}}p$ die klas van alle prefilter verfynings van $\mathcal{N}_{\mathcal{T}}(p)$ is, dan is $\Delta_{\mathcal{T}}$ 'n newel-pseudotopologiese struktuur op X en bevredig $(X, \Delta_{\mathcal{T}})$ (1) en (2) hierbo. (In hierdie sin is newel-pseudotopologiese ruimtes wat (1) en (2) bevredig die neweltopologiese ruimtes.)

Daar bestaan newel-pseudotopologiese ruimtes wat nie neweltopologiese ruimtes is nie.[3]

2.11 AFLEIDING. *'n Newel-pseudotopologiese vektorruimte (E, Δ) is 'n neweltopologiese vektorruimte as en slegs as $\cap\{\mathcal{F} : \mathcal{F} \in \Delta p\} \in \Delta p$ vir elke punt p in E.*

Die bewys is soortgelyk aan die bewys in die geval van pseudotopologiese vektorruimtes.

2.12 STELLING. *Gestel (E, Δ) is 'n newel-pseudotopologiese vektorruimte. In* **K** *dui 0 enige newelpunt met ondersteuning 0, of die gewone punt 0 aan. As $\mathcal{N}(0)$ die versameling van alle omgewings van die punt 0 in $(\mathbf{K}, \Delta_{\mathbf{K}})$ is, dan*
(1) $\Delta 0 + \Delta 0 \subset \Delta 0$,
(2) $\alpha\Delta 0 \subset \Delta 0$ vir elke punt α in **K**,
(3) $\mathcal{N}(0)\Delta 0 \subset \Delta 0$,
(4) $\mathcal{N}(0)p \in \Delta 0$ vir elke punt p in E.
Omgekeerd, gestel E is 'n vektorruimte en $\Delta 0$ is 'n nie-leë versameling van prefilters in E wat (1) – (4) hierbo bevredig, asook die voorwaardes van 1.1 met betrekking tot $\Delta 0$. Laat $\Delta p = p + \Delta(p - p)$ vir elke punt p in E. Dan is (E, Δ) 'n newel-pseudotopologiese vektorruimte.

Bewys. Gestel (E, Δ) is 'n newel-pseudotopologiese vektorruimte. Dan volg (1) en (3) van 2.3, en (2) en (4) volg van 2.6(1) en 2.6(2) onderskeidelik.
Omgekeerd, gestel $p = (x_p, \lambda)$ is 'n punt in E en $\mathcal{F} \in \Delta p$. Laat $0 = (0, \lambda)$. Aangesien $\mathcal{F} - p \in \Delta 0$, volg $\underline{\beta} \in \mathcal{F} - p$ vir elke $\beta > \lambda$. Dan

$$\mu_{p+\underline{\beta}}(t) = \sup\{\mu_p(m) \wedge \mu_{\underline{\beta}}(n) : m + n = t\} = \lambda \wedge \beta.$$

As $\beta > \lambda$ volg $p + \underline{\beta} = \underline{\lambda}$, dus $\underline{\lambda} \in \mathcal{F}$. Aangesien $\underline{\lambda} \subset \underline{\alpha}$ vir elke $\alpha > \lambda$ volg $\underline{\alpha} \in \mathcal{F}$ vir elke $\alpha > \lambda$. Derhalwe word aan 1.1(1) voldoen. Die eienskappe 1.1(2) – 1.1(4) is maklik bewysbaar. Verder $\Delta p + \Delta q = p + \Delta 0 + q + \Delta 0 \subset p + q + \Delta 0 = \Delta(p + q)$. Die bewys dat $(\Delta_{\mathbf{K}}\alpha)(\Delta p) \subset \Delta(\alpha p)$ is soortgelyk aan die ooreenkomstige bewys vir pseudotopologiese vektorruimtes.

Laat 1_ε die karakteristieke funksie van $\{v : |v| \leq \varepsilon\}$ in **K** aandui. As $\rho \in I$ laat ρ_ε die newelversameling $\rho.1_\varepsilon$ in **K** wees.

2.13 HULPSTELLING. *Gestel $\mathcal{N}(0)$ is die versameling van alle omgewings van die punt $0 = (0, \delta)$ in $(\mathbf{K}, \Delta_{\mathbf{K}})$ wees, en gestel $\mathcal{N}_1(0)$ is die prefilter $\{A \in I^{\mathbf{K}} : A \supset \rho_\varepsilon$ vir 'n sekere $\rho \in I$ en $\varepsilon > 0\}$. Dan $\mathcal{N}(0) = \mathcal{N}_1(0)$.*

Bewys. Gestel $\mathcal{M}(0)$ is die filter in **K** wat deur $\{\{v \in \mathbf{K} : |v| \leq \varepsilon\} : \varepsilon \geq 0\}$ voortgebring word. Dan is $\mathcal{T}_{\mathbf{K}}0$ die klas van alle filters in **K** wat fyner as $\mathcal{M}(0)$ is. Van definisie van die gebruiklike newel-pseudotopologiese struktuur $\Delta_{\mathbf{K}}$ op **K** volg dat indien $\rho \geq \delta$,

$$\rho_\varepsilon \in \mathcal{G}^\delta_{\mathcal{M}(0)} \subset \mathcal{G}^\delta_{\mathcal{H}}$$

vir elke $\mathcal{H} \in \mathcal{T}_{\mathbf{K}}0$, dus is ρ_ε 'n newel-oop versameling in **K** en $\rho_\varepsilon \in \mathcal{N}(0)$. Dus $\mathcal{N}_1(0) \subset \mathcal{N}(0)$.
Omgekeerd, as $A \in \mathcal{N}(0)$ dan $A \in \cap\{\mathcal{K} : \mathcal{K} \in \Delta_{\mathbf{K}}0\}$. Aangesien ook $A \in \mathcal{G}^\delta_{\mathcal{M}(0)}$ volg $\mu_A(0) > \delta$ en $\mu_A(\mathcal{M}(0)) \to \mu_A(0)$ in I_r. Neem $\delta < \xi < \mu_A(0)$ dan bestaan $v > 0$ sodat $\mu_A(\{z : |z| \leq v\}) \subset]\xi, 1]$. Kies $\delta < \beta < \xi$ en $\varepsilon < v$, dan $\mu_A(t) \geq \mu_{\beta_\varepsilon}(t)$, dit wil sê $A \supset \beta_\varepsilon$. Dus $A \in \mathcal{N}_1(0)$.

2.14 VOORBEELD. Laat 1_ε die karakteristieke funksie van die interval $[-\varepsilon, \varepsilon]$ in **R** wees. As $\alpha \in I$, laat α_ε die newelversameling $\alpha.1_\varepsilon$ in **R** wees. Gestel $0 = (0, \delta)$. Definieer 'n newel-pseudotopologiese struktuur Δ soos volg op die vektorruimte E (= **R**): 'n prefilter $\mathcal{F}$ op E is 'n element van $\Delta 0$ as daar $\varepsilon > 0$ bestaan sodat $\alpha_\varepsilon \in \mathcal{F}$ vir elke $\alpha \geq \delta$. Definieer $\Delta p = p + \Delta(p - p)$ vir elke punt p in E. Beskou E as 'n vektorruimte oor **K** (= **R**) en voorsien die skalaarliggaam **K** met die gebruiklike newel-pseudotopologiese struktuur $\Delta_{\mathbf{R}}$. Dan is (E, Δ) 'n newel-pseudotopologiese vektorruimte, maar nie 'n neweltopologiese vektorruimte nie.

Die vereistes van 1.1 met betrekking tot $\Delta 0$ kan maklik nagegaan word. Die ander vereistes van 2.12 word vervolgens ondersoek:

(1) As $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \Delta 0$ dan bestaan $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ sodat $\alpha_{\varepsilon_1} \in \mathcal{F}$ en $\beta_{\varepsilon_2} \in \mathcal{G}$ vir elke $\alpha, \beta \geq \delta$. Laat $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Dan

$$\mu_{\alpha_\varepsilon + \beta_\varepsilon}(t) = \sup\{\mu_{\alpha_\varepsilon}(m) \wedge \mu_{\beta_\varepsilon}(n) : m + n = t\}$$

$$= \begin{cases} \gamma & \text{as } |t| \leq 2\varepsilon \\ 0 & \text{andersins,} \end{cases}$$

waar $\gamma = \alpha \wedge \beta$. Dan $\gamma_{2\varepsilon} \in \mathcal{F} + \mathcal{G}$ vir elke $\gamma \geq \delta$ en derhalwe $\mathcal{F} + \mathcal{G} \in \Delta 0$.

(2) As $\mathcal{F} \in \Delta 0$ dan bestaan $\varepsilon > 0$ sodat $\alpha_\varepsilon \in \mathcal{F}$ vir elke $\alpha \geq \delta$. Gestel β is 'n gewone punt in **R**. As $\beta = 0$ volg

$$\mu_{\beta_{\alpha_\varepsilon}}(t) = \begin{cases} \sup\{\mu_{\alpha_\varepsilon}(y) : y \in \mathbf{R}\} & \text{as } t = 0 \\ 0 & \text{as } t \neq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \alpha & \text{as } t = 0 \\ 0 & \text{as } t \neq 0. \end{cases}$$

Aangesien $\beta_{\alpha_\varepsilon}$ die newelpunt $(0, \alpha)$ is en $[(0, \alpha)] \in \beta\mathcal{F}$ vir elke $\alpha \geq \delta$ volg $\beta\mathcal{F} \in \Delta 0$. As $\beta \neq 0$ volg

$$\mu_{\beta\alpha_\varepsilon}(t) = \mu_{\alpha_\varepsilon}(\beta^{-1}t)$$

$$= \begin{cases} \alpha & \text{as } |t| \leq \varepsilon\,|\beta| \\ 0 & \text{andersins,} \end{cases}$$

dus $\alpha_{\varepsilon|\beta|} = \beta\alpha_\varepsilon \in \beta\mathcal{F}$ vir elke $\alpha \geq \delta$. Dus $\beta\mathcal{F} \in \Delta 0$. As β die punt (x, λ) in $\mathbf{R}$ is, volg

$$\mu_{\beta\alpha_\varepsilon}(t) = \sup\{\mu_\beta(v) \wedge \mu_{\alpha_\varepsilon}(n) : vn = t\}$$

$$= \begin{cases} \gamma & \text{as } |t| \leq \varepsilon|x| \\ 0 & \text{andersins,} \end{cases}$$

met $\gamma = \lambda \wedge \alpha$. Dan $\gamma_{\varepsilon|x|} = \beta\alpha_\varepsilon \in \beta\mathcal{F}$ vir elke $\gamma \geq \delta$. Dus $\beta\mathcal{F} \in \Delta 0$.

(3) As $\mathcal{F} \in \Delta 0$ dan bestaan $\varepsilon > 0$ sodat $\alpha_\varepsilon \in \mathcal{F}$ vir elke $\alpha \geq \delta$. Laat 0 die newelpunt $(0, \zeta)$ in $\mathbf{K}$ wees. As $\beta \geq \zeta$, is β_ε 'n newel-oop versameling in $\mathbf{K}$. Verder,

$$\mu_{\beta_\varepsilon\alpha_\varepsilon}(t) = \sup\{\mu_{\beta_\varepsilon}(v) \wedge \mu_{\alpha_\varepsilon}(n) : vn = t\}$$

$$= \begin{cases} \gamma & \text{as } |t| \leq \varepsilon^2 \\ 0 & \text{andersins,} \end{cases}$$

waar $\gamma = \beta \wedge \alpha$. Aangesien $\beta_\varepsilon\alpha_\varepsilon = \gamma_{\varepsilon^2}$ vir elke $\beta \geq \zeta$ en $\alpha \geq \delta$, volg $\gamma_{\varepsilon^2} \in \mathcal{N}(0)\mathcal{F}$ vir elke $\gamma \geq \delta$. Dus $\mathcal{N}(0)\mathcal{F} \in \Delta 0$.

(4) Laat p die punt (x, λ) in E wees en kies $0 < \beta < \delta \wedge \lambda$. Weereens is β_ε 'n newel-oop versameling in $\mathbf{R}$ en

$$\mu_{\beta_\varepsilon p}(t) = \begin{cases} \gamma & \text{as } |t| \leq \varepsilon|x| \\ 0 & \text{andersins,} \end{cases}$$

waar $\gamma = \min\{\beta, \lambda\} = \beta$. Dus $\beta_\varepsilon p = \beta_{\varepsilon|x|} \subset \alpha_{\varepsilon|x|}$ vir elke $\alpha \geq \beta$. Aangesien dan $\alpha_{\varepsilon|x|} \in \mathcal{N}(0)p$ vir elke $\alpha \geq \delta$ volg $\mathcal{N}(0)p \in \Delta 0$.

Ten slotte word aangetoon dat (E, Δ) nie 'n neweltopologiese vektorruimte is nie. Gestel $B \in \cap\{\mathcal{F} : \mathcal{F} \in \Delta 0\}$. Vir $\varepsilon > 0$ laat $\mathcal{H}_\varepsilon = \{A \in I^X : A \supset \alpha_\varepsilon$ vir elke $\alpha \geq \delta\}$. Dan volg $B \in \mathcal{H}_\varepsilon \in \Delta 0$, derhalwe $B \supset \cup\{\alpha_\varepsilon : \alpha \geq \delta\} = 1_\varepsilon$. Aangesien dit vir elke $\varepsilon \geq 0$ geld, volg $B \supset E$, dus $B = E$. Maar $E \in \mathcal{F}$ vir elke $\mathcal{F} \in \Delta 0$, dus $\cap\{\mathcal{F} : \mathcal{F} \in \Delta 0\} = \{E\}$. Van die definisie van $\Delta 0$ volg $\cap\{\mathcal{F} : \mathcal{F} \in \Delta 0\} \notin \Delta 0$ en daarom is (E, Δ) nie 'n neweltopologiese vektorruimte nie.

3. Begrensdheid

'n Deelversameling A van 'n newel-pseudotopologiese vektorruimte (E, Δ) is gebalanseerd as $\lambda A \subset A$ vir elke $\lambda \in \mathbf{K}$ waar $|\lambda| \leq 1$. Die gebalanseerde omhulsel[6] van A is $\cup\{\lambda A : |\lambda| \leq 1\}$ en dit is die kleinste gebalanseerde deelversameling van E wat A bevat.

'n Deelversameling B van 'n neweltopologiese vektorruimte word begrens genoem[10] as vir elke omgewing U van 0 en elke $\alpha < \beta$ waar $\beta \leq \mu_U(0)$ 'n $t > 0$ bestaan sodat $t(\underline{\alpha} \cap B) \subset U$. Gestel B is 'n begrensde deelversameling en U is 'n omgewing van 0 in 'n neweltopologiese vektorruimte. Daar bestaan[9] 'n gebalanseerde omgewing W van 0 met $W \subset U$, dus as $\alpha < \beta$ met $\beta \leq \mu_W(0)$, volg $t(\underline{\alpha} \cap B) \subset W$ vir 'n sekere $t > 0$. Laat $N_t = \{\gamma : |\gamma| \leq t\}$, dan $N_t(\underline{\alpha} \cap B) \subset W \subset U$. As $\mathcal{K}(B)$ die prefilter aandui wat deur $\{\underline{\alpha} \cap B : \alpha > 0\}$ voortgebring word, dan konvergeer $\mathcal{N}(0)\mathcal{K}(B)$ na 0. Hierdie oorwegings dien as motivering vir die volgende:

3.1 DEFINISIE. *(1) Gestel B is 'n deelversameling van 'n newel-pseudotopologiese vektorruimte (E, Δ). Dan is B begrens (dit wil sê Δ-begrens) as óf $B = \emptyset$, óf $\mathcal{N}(0)\mathcal{K}(B) \in \Delta 0$* wanneer $B \neq \emptyset$.
(2) 'n Afbeelding van die newel-pseudotopologiese vektorruimte (E, Δ) na die newel-pseudotopologiese vektorruimte (E_1, Δ_1) is begrens as dit begrensde deelversamelings van E op begrensde deelversamelings van E_1 afbeeld.

3.2 HULPSTELLING. *'n Nie-leë deelversameling B van 'n newel-pseudotopologiese vektorruimte (E, Δ) is begrens as en slegs as $\mathcal{N}(0)B \in \Delta 0$.*

Bewys. Aangesien

$$\begin{aligned} \mu_{\rho_\varepsilon}(\underline{\alpha} \cap B)(t) &= \sup\{\mu_{\rho_\varepsilon}(v) \wedge \mu_{\underline{\alpha}\cap B}(n) : vn = t\} \\ &= \sup\{\rho \wedge \alpha \wedge \mu_B(n) : vn = t, |v| \leq \varepsilon\} \\ &= \sup\{\mu_{(\rho\wedge\alpha)_\varepsilon}(v) \wedge \mu_B(n) : vn = t\} \\ &= \mu_{(\rho\wedge\alpha)_\varepsilon B}(t) \end{aligned}$$

volg $\rho_\varepsilon(\underline{\alpha} \cap B) = \rho \wedge \alpha)_\varepsilon B$. Dus $\mathcal{N}(0)\mathcal{K}(B) \subset \mathcal{N}(0)B$. Omgekeerd, $\rho_\varepsilon B = \rho_\varepsilon(\underline{1} \cap B)$, dus $\mathcal{N}(0)B \subset \mathcal{N}(0)\mathcal{K}(B)$.

3.3 HULPSTELLING. *Gestel (E, Δ) is 'n newel-pseudotopologiese vektorruimte, A en B is begrensde deelversamelings van E en $\alpha \in \mathbf{K}$.*
(1) As (E_1, Δ_1) 'n newel-pseudotopologiese vektorruimte is en $f : E \to E_1$ is 'n newelkontinue lineêre afbeelding, dan is f begrens.
(2) $A \cup B$, αA en *$A + B$ is begrens.*
(3) As $C \subset A$ dan is C begrens.
(4) Elke eindige versameling van punte in E is begrens.
(5) Die gebalanseerde omhulsel van A is begrens.

Bewys. (1) Laat $F \in f(\mathcal{N}(0)A)$, dan $F \supset f(\rho_\varepsilon A)$ vir 'n sekere newelversameling $\rho_\varepsilon \in \mathcal{N}(0)$. Verder

$$\begin{aligned} \mu_{f(\rho_\varepsilon A)}(t) &= \sup\{\mu_{\rho_\varepsilon A}(s) : s \in f^{-1}(t)\} \\ &= \sup\{\sup\{\mu_{\rho_\varepsilon}(v) \wedge \mu_A(n) : vn = s\} : s \in f^{-1}(t)\} \\ &= \sup\{\sup\{\rho \wedge \mu_A(n) : vn = s, |v| \leq \varepsilon\} : s \in f^{-1}(t)\} \\ &= \sup\{\sup_{|v|\leq\varepsilon} \rho \wedge \mu_{vA}(s) : s \in f^{-1}(t)\} \\ &= \sup_{|v|\leq\varepsilon} \sup\{\rho_\varepsilon \wedge \mu_{vA}(s) : s \in f^{-1}(t)\} \\ &= \sup\{\rho \wedge \mu_{f(vA)}(t) : |v| \leq \varepsilon\} \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} \mu_{\rho_\varepsilon f(A)}(t) &= \sup\{\mu_{\rho_\varepsilon}(v) \wedge \mu_{f(A)}(n) : vn = t\} \\ &= \sup\{\rho \wedge \mu_{f(A)}(n) : vn = t, |v| \leq \varepsilon\} \\ &= \sup\{\rho \wedge \mu_{vf(A)}(t) : |v| \leq \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Maar $f(vA) = vf(A)$ (Katsaras, Liu[6], Proposition 2.2), dus $f(\rho_\varepsilon A) = \rho_\varepsilon f(A)$. Dan $F \in \mathcal{N}(0)f(A)$, gevolglik $f(\mathcal{N}(0)A) \subset \mathcal{N}(0)f(A)$. Aangesien $f(\mathcal{N}(0)A) \in \Delta_1 0$ volg dat $\mathcal{N}(0)f(A) \in \Delta_1 0$, dit wil sê $f(A)$ is begrens.

(2) Ons bewys dat $A + B$ begrens is. Laat $F \in \mathcal{N}(0)A + \mathcal{N}(0)B$. Daar bestaan newelversamelings $\lambda_{\varepsilon_1}, v_{\varepsilon_2} \in \mathcal{N}(0)$ sodat $\lambda_{\varepsilon_1}A + v_{\varepsilon_2}B \subset F$. Laat $\varepsilon = \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2$ en $\rho = \lambda \wedge v$. Ons toon aan dat

$$\rho_\varepsilon(A + B) \subset \rho_\varepsilon A + \rho_\varepsilon B, \qquad (*)$$

want dan sal $\rho_\varepsilon(A + B) \subset \lambda_{\varepsilon_1}A + v_{\varepsilon_2}B \subset F$ en dus $\mathcal{N}(0)A + \mathcal{N}(0)B \subset \mathcal{N}(0)(A + B)$. Aangesien $\mathcal{N}(0)A + \mathcal{N}(0)B \in \Delta 0 + \Delta 0 \subset \Delta 0$ volg $\mathcal{N}(0)(A + B) \in \Delta 0$, dit wil sê $A + B$ is begrens. Nou word (*) bewys:

$$\begin{aligned}\mu_{\rho_\varepsilon(A+B)}(t) &= \sup\{\mu_{\rho_\varepsilon}(v) \wedge \mu_{A+B}(n) : vn = t\} \\ &= \sup\{\rho \wedge \mu_{A+B}(n) : vn = t, |v| \leq \varepsilon\} \\ &= \sup\{\rho \wedge \mu_{v(A+B)}(t) : |v| \leq \varepsilon\}.\end{aligned}$$

Maar

$$\begin{aligned}\mu_{\rho_\varepsilon A+\rho_\varepsilon B}(t) &= \sup\{\mu_{\rho_\varepsilon A}(m) \wedge \mu_{\rho_\varepsilon B}(n) : m + n = t\} \\ &= \sup\{(\sup_{|r|\leq\varepsilon} \rho \wedge \mu_A(\tfrac{m}{r})) \wedge (\sup_{|s|\leq\varepsilon} \rho \wedge \mu_B(\tfrac{n}{s})) : m + n = t\} \\ &\geq \sup\{\sup_{|r|\leq\varepsilon} \rho \wedge \mu_{rA}(m) \wedge \mu_{rB}(n) : m + n = t\} \\ &= \sup\{\rho \wedge \sup_{m+n=t} \mu_{rA}(m) \wedge \mu_{rB}(n) : |r| \leq \varepsilon\} \\ &= \sup\{\rho \wedge \mu_{rA+rB}(t) : |r| \leq \varepsilon\}.\end{aligned}$$

Verder $rA + rB = r(A + B)$ (Katsaras, Liu[6], Corollary 2.3). Dus volg (*). Die ander bewerings word soortgelyk bewys.

3.4 DEFINISIE. *'n Newel-pseudotopologiese vektorruimte* (E, Δ) *is lokaalbegrens as elke* $\mathcal{F} \in \Delta 0$ *'n begrensde deelversameling van E bevat.*

3.5 VOORBEELD. Die newel-pseudotopologiese vektorruimte in 2.14 is lokaalbegrens. Gestel $0 = (0, \delta)$ en $\mathcal{F} \in \Delta 0$. Van definisie bestaan 'n sekere $\varepsilon > 0$ sodat $\alpha_\varepsilon \in \mathcal{F}$ vir elke $\alpha \geq \delta$. Laat $\rho_{\varepsilon_1}\alpha_\varepsilon \in \mathcal{N}(0)\alpha_\varepsilon$. Dan volg

$$\begin{aligned}\mu_{\rho_{\varepsilon_1}\alpha_\varepsilon}(t) &= \sup\{\mu_{\rho_{\varepsilon_1}}(v) \wedge \mu_{\alpha_\varepsilon}(n) : vn = t\} \\ &= \sup\{\rho \wedge \alpha : vn = t, |v| \leq \varepsilon_1, |n| \leq \varepsilon\}.\end{aligned}$$

Laat $\gamma = \rho \wedge \alpha$ dan volg $\rho_{\varepsilon_1}\alpha_\varepsilon = \gamma_{\varepsilon\varepsilon_1}$ en $\gamma_{\varepsilon\varepsilon_1} \in \mathcal{N}(0)\alpha_\varepsilon$ vir elke $\gamma \geq \alpha$. Van definisie van $\Delta 0$ volg $\mathcal{N}(0)\alpha_\varepsilon \in \Delta 0$, gevolglik is α_ε begrens.

3.6 DEFINISIE. *'n Newel-pseudotopologiese vektorruimte* (E, Δ) *is ewewigtig ("equable") as vir elke* $\mathcal{F} \in \Delta 0$ *'n ewewigtige prefilter* $\mathcal{G}$ *(dit wil sê* $\mathcal{N}(0)\mathcal{G} = \mathcal{G}$*) in E bestaan sodat* $\mathcal{G} \in \Delta 0$ en $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$.

3.7 HULPSTELLING. *Gestel* (E, Δ) en (E_1, Δ_1) *is newel-pseudotopologiese vektorruimtes en* $f : E \rightarrow E_1$ *is 'n lineêre afbeelding. As* (E, Δ) *ewewigtig is en as elke prefilter* $\mathcal{F} \in \Delta 0$ *'n deelversameling M van E bevat wat die eienskap het dat* $f(M)$ *begrens is, dan is f newelkontinu.*

Bewys. Gestel $\mathcal{F} \in \Delta 0$. Volgens aanname bestaan 'n ewewigtige prefilter $\mathcal{G} \in \Delta 0$ en $M \in \mathcal{G}$ sodat $\mathcal{F} \supset \mathcal{G}$ en $\mathcal{N}(0)f(M) \in \Delta_1 0$. Laat $V \in \mathcal{N}(0)f(M)$, dan bestaan 'n newelversameling $\rho_\varepsilon \in \mathcal{N}(0)$ sodat $V \supset \rho_\varepsilon f(M) = f(\rho_\varepsilon M)$. Aangesien $\rho_\varepsilon M \in \mathcal{N}(0)M \subset \mathcal{N}(0)\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ volg $V \in f(\mathcal{F})$, gevolglik $\mathcal{N}(0)f(M) \subset f(\mathcal{F})$. Dus $f(\mathcal{F}) \in \Delta_1 0$.

3.8 DEFINISIE. *'n Newel-pseudotopologiese vektorruimte* (E, Δ) *is bornologies as vir elke prefilter* $\mathcal{F} \in \Delta 0$ *'n ooreenkomstige begrensde versameling B bestaan sodat* $\mathcal{F} \supset \mathcal{N}(0)B$.

3.9 STELLING. *Gestel* (E, Δ) *is 'n newel-pseudotopologiese vektorruimte. Beskou die volgende bewerings:*
(1) (E, Δ) *is bornologies.*
(2) (E, Δ) *is ewewigtig en lokaalbegrens.*
(3) Elke begrensde lineêre afbeelding $f : E \rightarrow E_1$ *(waar* (E_1, Δ_1) *enige newel-pseudotopologiese vektorruimte is) is newelkontinu. Dan (1)* $\Rightarrow$ *(2)* $\Rightarrow$ *(3).*

Bewys. (1) $\Rightarrow$ (2): As $\mathcal{F} \in \Delta 0$ dan bestaan daar 'n begrensde versameling B sodat $\mathcal{F} \supset \mathcal{N}(0)B$. Aangesien $\mathcal{N}(0)B$ 'n ewewigtige filter in E, is, is (E, Δ) ewewigtig. Laat B' die gebalanseerde omhulsel van B wees. Dan volg $B' \in \mathcal{N}(0)B' \subset \mathcal{N}(0)B$, dus $B' \in \mathcal{F}$. Volgens 3.3 is B' begrens, dus is (E, Δ) lokaalbegrens.
(2) $\Rightarrow$ (3): Hierdie implikasie volg van 3.7.

SUMMARY

The theory of pseudo-topological vector spaces (i.e. limit vector spaces) is well-known, and recently the theory of fuzzy pseudo-topological spaces was developed by K.C. Min. In this paper fuzzy pseudo-topological structure is defined on vector spaces. A characterization of fuzzy pseudo-topological vector spaces is obtained, and an example is given of a fuzzy pseudo-topological vector space which is not a fuzzy topological vector space. A concept of boundedness is introduced for fuzzy pseudo-topological vector spaces. The definition of a bornological fuzzy pseudo-topological vector space leads to the result that a bounded linear mapping on a bornological fuzzy pseudo-topological vector space is fuzzy continuous.

LITERATUURVERWYSINGS

1. Fischer, H.R. (1959). Limesräume, *Math. Ann.*, 137, 269 - 303.
2. Bourbaki, N. (1966). *General Topology* (Hermann, Paris).
3. Min, K.C. (1989). Fuzzy limit spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, 32, 343 – 357.
4. Gähler, W. (1977/8). *Grundstrukturen der Analysis I & II* (Birkhäuser Verlag, Basel).
5. Weiss, M.D. (1975). Fixed points, separation and induced topologies for fuzzy sets, *J. Math. Anal. Appl.*, 50, 142 - 150.
6. Katsaras, A.K., Liu, D.B. (1977). Fuzzy vector spaces and fuzzy topological vector spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, 58, 135 – 146.
7. Srivastava, R., Lal, S.N., Srivastava, A.K. (1981). Fuzzy Hausdorff topological spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, 81, 497 – 506.
8. Kim, C.Y. (1987). Fuzzy topology and neighbourhood systems, *J. Nat. Acad. Sci. Korea Nat. Sci., Series* XXVI, 1 - 13.
9. Katsaras, A.K. (1981). Fuzzy topological vector spaces I, *Fuzzy Sets and Systems*, 6, 85 – 95.
10. Katsaras, A.K. (1984). Fuzzy topological vector spaces II, *Fuzzy Sets and Systems*, 12, 143 - 154.