Navorsings- en oorsigartikels

Pseudotopologiese Rieszruimtes

M.A. Muller
Departement Wiskunde, Universiteit van Stellenbosch, Stellenbosch, 7600

Ontvang 7 Januarie 1997; aanvaar 9 September 1997

Uittreksel

Pseudotopologiese ruimtes (dit wil sê limietruimtes) is in 1959 deur Fischer[1] gedefinieer. Eienskappe van topologiese Rieszruimtes is bekend. In hierdie artikel word aangetoon dat indien die topologie op 'n Rieszruimte met 'n pseudotopologie vervang word, meer algemene resultate verkry word.

Abstract

Pseudo-topological Riesz spaces

Pseudo-topological spaces (i.e. limit spaces) were defined by Fischer in 1959. Properties of topological Riesz spaces are well-known. In this paper it is shown that if the topology on a Riesz space is replaced by a pseudo-topology more general results are obtained.

INLEIDING

Gestel A is 'n nie-leë deelversameling van 'n versameling X. Laat $[A]$ die filter in X aandui wat deur A voortgebring word; vir $x \in X$ laat $[x]$ die filter in X wees wat deur $\{x\}$ voortgebring word. Laat $\mathbb{F}(X)$ die versameling van alle filters in X aandui. Vir $\mathcal{F} \in \mathbb{F}(X)$ laat $[\mathcal{F}] = \{\mathcal{G} \in \mathbb{F}(X) : \mathcal{F} \subset \mathcal{G}\}$. Indien vir elke $x \in X$ 'n ooreenkomstige deelversameling τx van $\mathbb{F}(X)$ bestaan, en wat die volgende eienskappe het:

(1) as $\mathcal{F} \in \tau x$, $\mathcal{G} \in \mathbb{F}(X)$ en $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ dan $\mathcal{G} \in \tau x$,
(2) as $\mathcal{F} \in \tau x$ en $\mathcal{G} \in \tau x$ dan $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \in \tau x$, en
(3) $[x] \in \tau x$,

dan word (X,τ) 'n pseudotopologiese ruimte genoem.[1,2] As $\mathcal{F} \in \tau x$ sê ons die filter $\mathcal{F}$ konvergeer na x. Elke topologiese ruimte (X,T) kan as 'n pseudotopologiese ruimte (X,τ) beskou word indien ons vir elke $x \in X$ die versameling τx kies om die versameling van alle filters in $\mathbb{F}(X)$ te wees wat fyner as die T-omgewingsfilter van X is. Vir enige pseudotopologiese ruimte (X,τ) bestaan daar 'n geassosieerde topologie T_τ op X waarin 'n versameling A oop is as $A = \varnothing$, of indien vir elke $x \in A$ daar 'n $F \in \cap\{\mathcal{F} : \mathcal{F} \in \tau x\}$ bestaan sodat $F \subset A$.

Die τ-sluiting $\bar{A}$ van 'n deelversameling A van 'n pseudotopologiese ruimte (X,τ) word deur $\bar{A} = \{x \in X : A \in \mathcal{F}$ vir 'n sekere $\mathcal{F} \in \tau x\}$ gedefinieer, en ons noem A τ-geslote as $\bar{A} = A$. Ons sê (X,τ) is Hausdorff indien $\tau x \cap \tau y = \varnothing$ wanneer $x \neq y$.

As (X,τ) en (Y,σ) pseudotopologiese ruimtes is, noem ons die afbeelding $f : X \to Y$ kontinu (meer presies, τ-σ-kontinu) by die punt x as $\mathcal{F} \in \tau x$ impliseer $f(\mathcal{F}) \in \sigma f(x)$, waar $f(\mathcal{F})$ die filter in Y is wat deur $\{f(F) : F \in \mathcal{F}\}$ voortgebring word. Ons noem f kontinu as f by elke $x \in X$ kontinu is.

In hierdie artikel word alle vektorruimtes oor die reële getalle $\mathbb{R}$ geneem. As E 'n vektorruimte is, $x \in E$, $A \subset E$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F} \in \mathbb{F}(E)$, $\mathcal{G} \in \mathbb{F}(E)$ en $\mathcal{H} \in \mathbb{F}(\mathbb{R})$ dan is $x + \mathcal{F}$, $\alpha\mathcal{F}$, $\mathcal{F} + \mathcal{G}$, $\mathcal{H}x$, $\mathcal{H}A$ en $\mathcal{H}\mathcal{F}$ onderskeidelik die filters wat deur $\{x + F : F \in \mathcal{F}\}$, $\{\alpha F : F \in \mathcal{F}\}$, $\{F+G : F \in \mathcal{F}, G \in \mathcal{F}\}$, $\{Hx : H \in \mathcal{H}\}$, $\{HA : H \in \mathcal{H}\}$ en $\{HF : H \in \mathcal{H}, F \in \mathcal{F}\}$ voortgebring word. Laat $\mathcal{N}(0)$ die filter in $\mathbb{R}$ aandui wat deur $\{N_\varepsilon(0) : \varepsilon > 0\}$, waar $N_\varepsilon(0) = [-\varepsilon,\varepsilon]$, voortgebring word. Laat $\tau_{\mathbb{R}}$, waar $\tau_{\mathbb{R}} 0 = [\mathcal{N}(0)]$, die pseudotopologiese vektorruimtestruktuur op $\mathbb{R}$ wees wat van die gebruiklike topologie op $\mathbb{R}$ afkomstig is. As E 'n vektor-ruimte en (E,τ) 'n pseudotopologiese ruimte is wat sodanig is dat die afbeeldings $(x,y) \to x+y$ van $(E,\tau) \times (E,\tau)$ in (E,τ) en $(\alpha,x) \to \alpha x$ van $(\mathbb{R},\tau_{\mathbb{R}}) \times (E,\tau)$ in (E,τ) beide kontinu is, word (E,τ) 'n reële pseudotopologiese vektorruimte genoem. Gestel die pseudotopologiese vektorruimte (E,τ) het die bykomstige eienskap dat $\cap\{\mathcal{F} : \mathcal{F} \in \tau 0\} \in \tau 0$. Met die geassosieerde topologie T_τ op E is $\cap\{\mathcal{F} : \mathcal{F} \in \tau 0\}$ die T_τ-omgewingsfilter van 0 en in hierdie sin is (E,τ) 'n topologiese vektorruimte.[3]

Gestel E is 'n Rieszruimte en (E,τ) is 'n reële pseudotopologiese vektorruimte. Ons noem (E,τ) lokaal-solied indien vir elke $\mathcal{F} \in \tau 0$ 'n ooreenkomstige filter $\mathcal{G} \in \tau 0$ bestaan wat sodanig is dat $\mathcal{G}$ 'n basis van soliede versamelings het en $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. Byvoorbeeld, laat τ die pseudotopologiese vektorruimtestruktuur op $\mathbb{R}$ wees wat deur $\tau 0 = \{\mathcal{F} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}) : [-\delta,\delta] \in \mathcal{F}$ vir 'n sekere $\delta > 0\}$ gedefinieer word. Dan is $(\mathbb{R},\tau)$ 'n lokaal-soliede pseudotopologiese Rieszruimte, maar nie 'n topologiese vektorruimte nie.[4]

RESULTATE

1. STELLING *Gestel (E,τ) is 'n lokaal-soliede pseudotopologiese Rieszruimte. Dan is die afbeelding $x \to x^+$ kontinu.*

Bewys. Neem $\mathcal{F} \in \tau 0$. Daar bestaan 'n filter $\mathcal{G} \in \tau 0$ wat 'n basis van soliede versamelings het sodat $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. As G 'n soliede versameling in $\mathcal{G}$ is, dan bestaan daar 'n sekere $F \in \mathcal{F}$ met $F \subset G$. Dan $F^+ = \{x^+ : x \in F\} \subset G$. As $\mathcal{F}^+$ die filter is wat deur $\{F^+ : F \in \mathcal{F}\}$ voortgebring word, volg $G \in \mathcal{F}^+$, dus $\mathcal{F}^+ \in \tau 0$.

Onder die aannames van die stelling volg dat die afbeeldings $x \to |x|$, $x \to x^-$, $(x,y) \to x \vee y$ en $(x,y) \to x \wedge y$ kontinu is. 'n Deelversameling B van 'n pseudotopologiese vektorruimte (E,τ) word τ-begrens genoem[2] as $B = \varnothing$ of as $\mathcal{N}(0)B \in \tau 0$ vir $B \neq \varnothing$.

2. STELLING *Gestel (E,τ) is 'n lokaal-soliede pseudotopologiese Rieszruimte.*

(a) Elke orde-begrensde deelversameling van E is τ-begrens.
(b) Die τ-sluiting van 'n Riesz-deelruimte van E is 'n Riesz-deelruimte van E.
(c) Die τ-sluiting van 'n soliede deelversameling van E is solied.

(d) Die soliede omhulsel van 'n τ-begrensde deelversameling van E is τ-begrens.

Bewys. (a) Gestel S is 'n orde-begrensde deelversameling van E, dit wil sê $S \subset [-u,u]$ vir 'n sekere $u \geq 0$. Daar bestaan 'n filter $\mathcal{G} \in \tau 0$ wat 'n basis van soliede versamelings het sodat $\mathcal{G} \subset \mathcal{N}(0)u$. As $G \in \mathcal{G}$ volg $N_\varepsilon(0)u \subset G$ vir 'n sekere $\varepsilon > 0$. Aangesien ons kan aanvaar dat G solied is, volg $N_\alpha(0)S \subset G$ vir 'n sekere $\alpha > 0$. Dus is $\mathcal{G} \subset \mathcal{N}(0)S$ en S is τ-begrens.

(b) Gestel M is 'n Riesz-deelruimte van E. As $x, y \in \bar{M}$ dan bestaan daar filters $\mathcal{F} \in \tau x$ en $\mathcal{G} \in \tau y$ met $M \in \mathcal{F}$ en $M \in \mathcal{G}$. Aangesien $M = M + M \in \mathcal{F} + \mathcal{G} \in \tau(x+y)$ volg $x + y \in \bar{M}$. As $\lambda \in \mathbb{R}$ volg $M = \lambda M \in \lambda\mathcal{F} \in \tau(\lambda x)$ en $\lambda x \in \bar{M}$. Dus is $\bar{M}$ 'n vektordeelruimte van E. Omdat $M \in \mathcal{F}$ bestaan daar 'n $F \in \mathcal{F}$ sodat $F \subset M$. Verder, $F^+ \subset M^+ \subset M$ omdat M 'n Riesz-deelruimte is. Uit kontinuïteit volg $M \in \mathcal{F}^+ \in \tau x^+$, en dus $x^+ \in \bar{M}$. Aangesien dit vir elke $x \in \bar{M}$ geldig is, is $\bar{M}$ 'n Riesz-deelruimte van E.

(c) Gestel A is 'n soliede deelversameling van E, $x \in \bar{A}$ en $|y| \leq |x|$. Daar bestaan 'n filter $\mathcal{F} \in \tau 0$ met 'n basis van soliede versamelings sodat $A \cap (x+F) \neq \emptyset$ vir enige soliede versameling $F \in \mathcal{F}$. Dan volg $x \in A - F$. Omdat A en F soliede versamelings is, is $A-F$ solied en gevolglik $y \in A-F$. Dan $y + F \subset A$, en dus $A \in y + \mathcal{F} \in \tau y$. Dus $y \in \bar{A}$.

(d) Laat $S_B = \cup\{[-b,b] : b \in B, b \geq 0\}$ die soliede omhulsel van 'n τ-begrensde versameling B wees. Aangesien $\mathcal{N}(0)B \in \tau 0$ bestaan daar 'n filter $\mathcal{F} \in \tau 0$ met 'n basis van soliede versamelings sodat $\mathcal{F} \subset \mathcal{N}(0)B$. Neem enige $F \in \mathcal{F}$ dan bestaan daar 'n $\varepsilon > 0$ sodat $N_\varepsilon(0)B \subset F$. Omdat ons kan aanvaar dat F 'n soliede versameling is, volg $N_\varepsilon(0)S_B \subset F$, gevolglik $\mathcal{F} \subset N_\varepsilon(0)S_B$ en $N_\varepsilon(0)S_B \in \tau 0$. Dus is S_B τ-begrens.

'n Bornologiese pseudotopologiese vektorruimte[5] is 'n pseudotopologiese vektorruimte (E,τ) met die eienskap dat vir elke $\mathcal{F} \in \tau 0$ 'n ooreenkomstige τ-begrensde versameling B bestaan sodat $\mathcal{N}(0)B \subset \mathcal{F}$.

3. STELLING *Gestel (E,τ) is 'n bornologiese pseudotopologiese Rieszruimte. As die soliede omhulsel van elke τ-begrensde deelversameling van E τ-begrens is, is (E,τ) lokaal-solied.*

Bewys. Neem $\mathcal{F} \in \tau 0$. Dan $\mathcal{N}(0)B \subset \mathcal{F}$ vir 'n sekere τ-begrensde versameling B. As S_B die soliede omhulsel van B is, volg $\mathcal{N}(0)S_B \in \tau 0$ en $\mathcal{N}(0)S_B \subset \mathcal{N}(0)B \subset \mathcal{F}$. Aangesien die filter $\mathcal{N}(0)S_B$ 'n basis van soliede versamelings het, volg dat (E,τ) lokaal-solied is.

4. STELLING *Gestel (E,τ) is 'n Hausdorff lokaal-soliede pseudotopologiese Rieszruimte.*

(a) Die positiewe keël van E is τ-geslote.
(b) E is Archimedies.
(c) Elke band in E is τ-geslote.

Bewys. (a) Gestel $x \in \overline{E^+}$, dan $E^+ \in \mathcal{F}$ vir 'n sekere $\mathcal{F} \in \tau x$. Laat $\mathcal{F}_{E^+} = \{U \subset E : F \cap E^+ \subset U$ vir 'n sekere $F \in \mathcal{F}\}$, dan $\mathcal{F}^+ \subset \mathcal{F}_{E^+}$. Maar $\mathcal{F}_{E^+} = \mathcal{F}$, en uit kontinuïteit volg $\mathcal{F}^+ \in \tau x^+$, dus $\mathcal{F} \in \tau x^+$. Aangesien (E,τ) Hausdorff is, volg $x = x^+$, dus $x \in E^+$.

(b) Gestel $x \in E^+$ en veronderstel daar bestaan $y \in E^+$ sodat $\frac{1}{n}y - x \in E^+$ vir $n = 1,2,\ldots$.. Laat $\mathcal{F}$ die filter wees wat deur die versamelings $\{\frac{1}{n}y : n \geq M\}$, waar $M = 1,2,\ldots$ voortgebring word. Aangesien $\{y\}$ τ-begrens is en $\mathcal{N}(0)y \subset \mathcal{F}$ volg $\mathcal{F} \in \tau 0$. Dan $\mathcal{F} - x \in \tau(-x)$. Maar $E^+ \in \mathcal{F} - x \in \tau(-x)$, dus $-x \in \overline{E^+} = E^+$ volgens (a). Dus $x = 0$.

(c) Ons toon aan dat elke nie-leë deelversameling D van E 'n τ-geslote disjunkte komplement $D^d = \{u \in E : |u| \wedge |v| = 0$ vir alle $v \in D\}$ het. Neem $x \in \overline{D^d}$ dan bestaan daar 'n filter $\mathcal{F} \in \tau x$ met $D^d \in \mathcal{F}$. Vir $y \in D$ laat $|\mathcal{F}| \wedge |y|$ die filter aandui wat deur die versamelings $\{|f| \wedge |y| : f \in F\}$, waar $F \in \mathcal{F}$, voortgebring word. Dan $[0] \subset |\mathcal{F}| \wedge |y|$, en gevolglik $|\mathcal{F}| \wedge |y| \in \tau 0$. Omdat die roosteroperasies kontinu is, volg $|\mathcal{F}| \wedge |y| \in \tau(|x| \wedge |y|)$, en omdat E Hausdorff is, volg $|x| \wedge |y| = 0$. Die resultaat volg van die feit dat E Archimedies is (kyk (b)), en $B = B^{dd}$ vir enige band B in E.

Ons noem 'n filter in 'n pseudotopologiese vektorruimte absorberend[2] as vir elke $x \in E$ τx 'n basis van absorberende filters het. As E 'n Rieszruimte is en A is 'n gerigte deelversameling van E, laat $\mathcal{F}(A)$ die snitfilter[6] ("filter of sections") van A wees. Die volgende resultaat is bekend wanneer pseudotopologie met topologie vervang word[7]:

5. STELLING *Gestel (E,τ) is 'n lokaal-soliede en absorberende pseudotopologiese Rieszruimte. Laat S 'n gerigte deelversameling van die positiewe keël in E wees en laat u = sup S. As elke τ-geslote ideaal van E 'n band is, volg $\mathcal{F}(S) \in \tau u$.*

Bewys. Laat $\mathcal{H} \in \tau 0$ 'n filter wees wat 'n basis van soliede en absorberende versamelings het. Vir enige $H \in \mathcal{H}$ bestaan daar 'n ooreenkomstige δ $(0 < \delta < 1)$ met $(1-\delta)u \in H$. Vir $x \in S$ skryf $S_x = \{y : y \geq x\}$ en laat A die ideaal in E wees wat deur $(S_x - \delta u)^+$ voortgebring word. Dan volg $u \in \{A\}$, die band wat deur A in E voortgebring word. Volgens 2(b) en die aanname van die stelling is die τ-sluiting $\bar{A}$ van A begrens in E. Dus $\{A\} \subset \bar{A}$. Daar bestaan 'n filter $\mathcal{G} \in \tau 0$ wat 'n basis van soliede versamelings het sodat $A \in u + \mathcal{G}$. Omdat $\mathcal{G} + \mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ volg dat $A \cap (u + G + H) \supset A \cap (u + G) \neq \emptyset$ vir alle $G \in \mathcal{G}$ en $H \in \mathcal{H}$. Laat $w \in A$ met $w - u \in G + H$. Dan $0 \leq w \leq n(t - \delta u)^+$ vir 'n sekere $t \in S_x$ en 'n sekere natuurlike getal n. Aangesien $(t-\delta u)^- \wedge (t - \delta u)^+ = 0$ volg $(t-\delta u)^- \wedge w = 0$. Dus $(t-\delta u)^- + (w \wedge u) = (t-\delta u)^+ \vee (w \wedge u) \leq u$, gevolglik $0 \leq (t-\delta u)^- \leq u - u \wedge w \leq |u - w| \in G + H$ wat solied is. Dus $(t-\delta u)^- \in G + H$. Neem $y \in S_t$, dan $u-y \leq u-t = (1-\delta)u + (t - \delta u) \leq (1-\delta)u + (t-\delta u)^- \in H + G + H$. Dan volg $\mathcal{G} + \mathcal{H} + \mathcal{H} + u \subset \mathcal{F}(S)$, dit wil sê $\mathcal{F}(S) \in \tau u$.

SUMMARY

Pseudo-topological spaces (i.e. limit spaces) were defined by Fischer in 1959. Properties of topological Riesz spaces are well-known. In this paper it is shown that if the topology on a Riesz space is replaced by a pseudo-topology more general results are obtained. One such result is the following: Suppose (E,τ) is a locally solid and absorbent pseudo-topological Riesz space and S is a directed subset of the positive cone in E. If $u = \sup S$ and every τ-closed ideal of E is a band, then the filter of sections of S τ-converges to u.

LITERATUURVERWYSINGS

1. Fischer, H.R. (1959). Limesräume, *Math. Ann.*, 137, 269-303.
2. Gähler, W. (1977/8). *Grundstrukturen der Analysis I & II* (Birkhäuser Verlag, Basel).
3. Frölicher, A., Bucher, W. (1966). *Calculus in vector spaces without norm* (Springer-Verlag, Berlin).
4. Bucher, W. (1968). Différentiabilité de la composition de certains espaces fonctionnels, *Comment. Math. Helv.*, 43, 256-288.
5. De Bruyn, G.F.C. (1984). On vector spaces with locally bounded convergence structures, *Quaestiones Math.*, 7, 377-383.
6. Schaefer, H.H. (1967). *Topological vector spaces* (Macmillan, New York).
7. Luxemburg, W.A.J. (1965). Notes on Banach function spaces. Note XIV., *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A*, 68, 229-248.