

Elektromagnetiese modelle vir elektriese spoorbaanstelsels

B.M. Steyn* en J.D. van Wyk**

Navorsingsgroep Industriële Elektroniese Tegnologie, Fakulteit Ingenieurswese, Randse Afrikaanse Universiteit, Posbus 524, Aucklandpark, 2006

Ontvang 20 September 1996; aanvaar 28 November 1996

UITTREKSEL

By die bestudering en die ontwerp van spoorstroombane is betroubare elektromagnetiese modelle van kardinale belang. Hieronder is modelle vir die bestudering van die werking van die verskillende tipes spoorstroombane, sowel as modelle vir die berekening van die invloed van steurings op die spoorstroombaan. Enige van hierdie modelle het egter 'n aantal insette, wat as bekend beskou word, nodig. Die vernaamste hiervan is die primêre transmissielynkonstantes van die spoorbaan en die verspreiding van trekkragstrome in die spore. Modelle wat vir hierdie parameters gevind is, word bespreek voordat daar oorsigtelik na sekere van die genoemde spoorstroombaanmodelle gekyk word.

ABSTRACT

Electromagnetic models for electric track circuit systems

The use of electromagnetic models is very expedient when railway track circuits are designed or when their operation is being studied. These electromagnetic models include models for performance analysis of the different types of track circuits as well as models used to study the effect of electromagnetic interference. Before these models can produce useful results they all require accurate input parameters. These parameters include the transmission line parameters of the track and the traction current distribution along the length of the track. Models that have been developed for these parameters are presented in this paper, together with an overview of the available track circuit models.

Lys van simbole

a	Die radius van die ekwivalente ronde geleier
$a_{k,el}$	Radius van die geleiers
$2b$	Die afstand tussen die spore
D	Halfte van die afstand tussen die substasie en die lokomotief in meter
$h_{k,el}$	Hoogte van geleiers k en q bokant die aarde
$I_1 = I_s$	Lokomotief of substasiestroom onderskeidelik
I_{1b}, I_{2b}	Die strome in die onderskeie spore by die bron
I_{1r}, I_{2r}	Die strome in die onderskeie spore by die ontvanger
I_{1k}	Die stroom in die trekkragspoor, wat vanaf die aangrensende seksie by die spoorstroombaan invloei
I_{rk}	Die stroom in die trekkragspoor, wat na die aangrensende seksie by die spoorstroombaan uitvloei
I_1	Die stroom in spoor 1
I_2	Die stroom in spoor 2
J_0	Besselfunksie
J_1	Besselfunksie
V_1	Die spoor-aardspanning van spoor 1
V_2	Die spoor-aardspanning van spoor 2
V_1	Die spannings wat in die onderskeie spore deur die strome in die bobaan en die spore van die tweede lyn geïnduseer word
V_{1b}, V_{2b}	Die spoor-aardspanning van die onderskeie spore by die bron
V_{1r}, V_{2r}	Die spoor-aardspanning van die onderskeie spore by die ontvanger
Y	Die admittansie vanaf die gegewe spoor na die aarde
Z_{s1}	Die selfimpedansie van spoor nummer 1
Z_{s2}	Die selfimpedansie van spoor nummer 2
Z_{12}	Die wedersydse impedansie by spoor 1 as gevolg van

	die stroom in spoor nummer 2
Z_{21}	Die wedersydse impedansie by spoor 2 as gevolg van die stroom in spoor nummer 1
Z_b	Die ekwivalente bronimpedansie
Z_r	Die ekwivalente ontvangerimpedansie
Z_1	Die interne impedansie van die spoor
Z_s	Eksterne impedansie van die geleieraardlus
Z_m	Wedersydse impedansie tussen die twee geleiers
Z_0	Karakteristieke impedansie = $\sqrt{\frac{R}{G}}$
σ_1	Die geleidingsvermoë van die spoor
γ_1	Die voortplantingskonstante
μ_1	Permeabiliteit van die spoor
ϵ_1	Permittiwiteit van die spoor
ω	Die hoekfrekwensie
σ_2	Geleidingsvermoë van die grond
ϵ_2	Permittiwiteit van die grond
γ	Voortplantingskonstante = \sqrt{RG}

1. AGTERGROND

Spoornet is deurlopend besig met die evaluering en verbetering van sinjaalstelsels. Die doel hiervan is om die huidige roetes, met die verskillende samestellings van die treine, optimaal te kan benut, sonder om die veiligheid van bewegings te beïnvloed. Aangesien enige van hierdie stelsels altyd in die omgewing van die trekkragstelsel sal funksioneer, is dit noodsaaklik dat betroubare modelle beskikbaar sal wees om die elektromagnetiese versoenbaarheid van die stelsels mee te voorspel en te evalueer. Hierdie noodsaaklikheid word verder aangehelp deur die vinnige vordering op die gebied van drywingselektronika, en veral die toepassings hiervan in lokomotiewe. Hierdie ontwikkeling bring mee dat strome oor 'n wye frekwensiebereik in

* Tans: Spoornet, Infrastruktuur: Sinjale, Johannesburg

** Outeur aan wie korrespondensie gerig kan word

die trekkragsstelsel voorkom, en die sinjalering kan beïnvloed.

Die spoorstroombaan (treindeteksie) is een van die primêre insette na die sinjaalstelsel en die betroubare werking hiervan is essensieel vir die veilige en doeltreffende beheer van verkeer. Modelle vir die bestudering van die spoorstroombaan en die bepaling van die elektromagnetiese limiete waarbinne dit nog veilig kan funksioneer, is dus van kardinale belang.

2. MODELLE VIR DIE SPOORSTROOMBAAN

Twee tipes modelle word benodig by die bestudering en ontwerp van die spoorstroombaan, naamlik:

- Modelle vir die bestudering van die werking van die spoorstroombaan.
- Modelle vir die bestudering van die invloed van sturings op die spoorstroombaan as gevolg van strome in die trekkragsstelsel.

Vir die eerste geval, (a), word drie modelle vir die spoorstroombaan behandel. Die eerste hiervan is in terme van die klassieke transmissielynmodel. Dit kan gebruik word om die verloop van die spanning en stroom op enige punt langs die lengte van die spoorbaan te bepaal. Hierdie, en die ingangsimpedansie vir gegewe terminasies en lengte van die spoorstroombaan is maar enkele van die toepassings waarvoor dié model gebruik kan word.

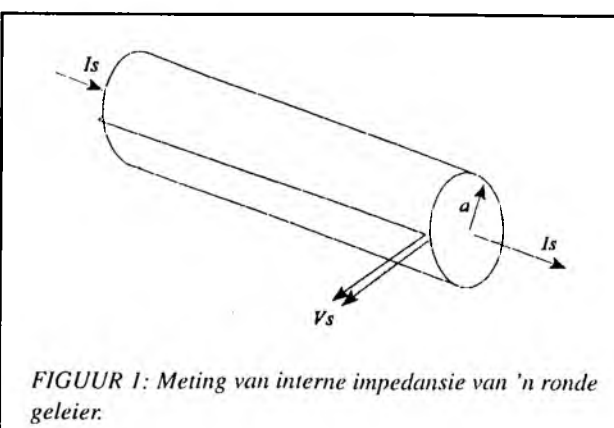
Die tweede spoorstroombaanmodel is 'n numeriese model in terme van transmissiematrikse wat vir die spoorbaan bepaal word. Hierdie model is veral geskik vir die berekening van die invloed van gekonsentreerde stroombaanelemente op gegewe posisies van die spoorbaan.

Die laaste model vir die spoorstroombaan, soos in (a) genoem, is in terme van die sogenaamde "T"- en "PI"-netwerke. Hierdie model is veral geskik wanneer die strome en spannings langs die lengte van die spoorstroombaan onbelangrik is en daar slegs in die strome en spannings by die ingang en uitgang van die spoorstroombaan belang gestel word.

'n Model waarmee die invloed van sturings op spoorstroombaan bestudeer kan word, is nodig sodat elektriese limiete vir die spesifieke spoorstroombaan onder beskouing, binne die elektromagnetiese omgewing van die trekkragsstelsel, bepaal kan word. 'n Model van hierdie aard is omvangryk en kan dus nie hier in detail bespreek word nie.

Enige van dié genoemde modelle het egter 'n aantal gemeenskaplike insette nodig voordat dit van enige waarde kan wees. Die vernaamste hiervan is:

- Die elektriese parameters van die spoorbaan.
- Die verandering van die parameters met frekwensie, spoorstroom en temperatuur.



- Die impedansies van die stelsel van geleiers in die trekkragsstelsel.
- Die verspreiding van die trekkragsstroom tussen die stelsels van geleiers en die grond, as 'n funksie van die afstand vanaf die substasie en ook die frekwensie betrokke (gelyk- en wisselstroom).

Voordat daar dus opsommend na die genoemde modelle teruggekeer word, sal die elektromagnetiese modelle vir die bogenoemde parameters in meer detail bespreek word.

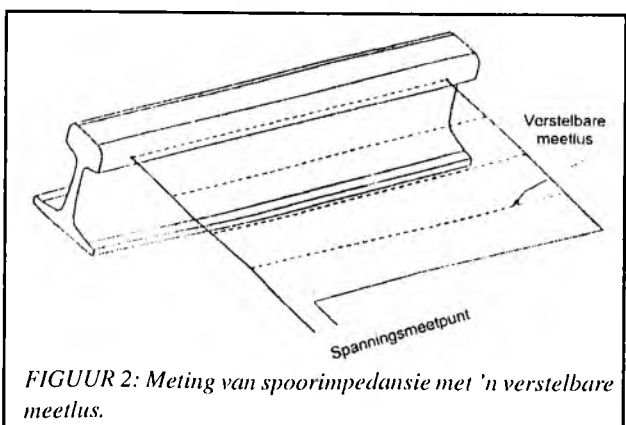
3. DIE SPOOR AS 'N RONDE GELEIER

Vir die doel van treindeteksie kan die spoorbaan as 'n transmissielyn gemodelleer word. Die primêre konstantes van die spoorbaan R, L, G en C kom as verspreide elemente langs die lengte van die spoorbaan voor. Die vorm van die spoor maak dit egter onmoontlik om analitiese uitdrukkings vir hierdie parameters te verkry.

Tans is uitgebreide programmatuurpakkette ook beskikbaar gebaseer op die metodes van eindige elemente. Hierdie numeriese metodes kan gebruik word om die impedansies te bereken,^{1,2} maar is nadelig omdat die insig wat met analitiese oplossings gemaak is, verlore gaan. Soos verder uit hierdie bydrae sal blyk, is dit ook nie nodig om vir redelike akkuraatheid hierna oor te gaan nie. Om hierdie rede is 'n metode in terme van interne en eksterne impedansies ontwikkel, waarvolgens die spoor met 'n ekwivalente ronde geleier vervang kan word, sonder om groot foute te maak.³ Met die spoor as ronde geleier beskou, kan eenvoudige analitiese uitdrukkings vir die berekening van die genoemde parameters verkry word.

Indien die nabyheidseffek in die geval van ronde geleiers buite rekening gelaat word, kan die magneetveld as sirkulêr om die geleiers beskou word. Indien die impedansie van die ronde geleier gemeet word deur 'n bekende stroom daardeur te laat vloei, en die spanning oor 'n gegewe lengte op die oppervlakte daarvan te meet, kan die interne impedansie daarvan bepaal word (sien figuur 1). Omdat die magneetveld sirkulêr om die geleier is en dieselfde vloei altyd deur die spanningsmeetgeleiers ingesluit word, sal die gemete interne impedansie oral op die oppervlakte van die geleier dieselfde wees.

Indien dieselfde meting op 'n spoor gedoen word, sal die meting, op verskillende posisies op die oppervlak verskillende resultate lewer, omdat die magnetiese vloei wat deur die spanningsmeetgeleiers ingesluit word, by elke punt verskil. Indien die spanningsmeetlus by 'n gegewe punt op die oppervlakte van die spoor vergroot word om meer van die vloei buite die spoor in te sluit, sal die gemete interne impedansie telkens vergroot (sien figuur 2). Dit is juis hierdie eienskap wat gebruik word om die interne impedansie van die spoor in terme van ronde geleiers te definieer.



Deur die impedansie van die spoor op verskeie punte op die oppervlak te meet en telkens die meetlus te vergroot, kan 'n konstante impedansiekontoer om die spoor verkry word wat nagenoeg sirkulêr is en nog aan die oppervlak van die spoor raak. Die impedansie van die punt waar die konstante impedansiekontoer die spoor raak, sal ook die punt van maksimum oppervlakte-impedansie van die spoor wees en word as die interne impedansie van die spoor geneem. Om die radius van die ekwivalente ronde geleier te vind, word daar soos volg te werk gegaan:

Die afstand tussen die sny punte van die impedansiekontoer met die hartlyn van die spoor (punte A en B in figuur 3) word gehalveer en as die middelpunt van die ekwivalente ronde spoor geneem. In figuur 3 word dit met 'n "O" gemerk. Die radius van die geleier word dan geneem vanaf hierdie middelpunt tot by die punt van maksimum impedansie, "C" in figuur 3.

Uit eksperimentele metings op verskeie tipes spore, by 'n frekwensie van 50 Hz, is gevind dat die omtrek van die ekwivalente ronde geleier en die van die spoor nagenoeg dieselfde is.

4. KONTROLERING VAN DIE EKWIVALENTE RONDE SPOOR

Om die prosedure wat bo in paragraaf 3 gebruik is in die verkryging van 'n ekwivalente ronde geleier te kontroleer, is die betrokke impedansies van twee tipes modelspore gemeet. Die eerste het 'n vorm wat ooreenstem met dié van die werklike spoor, en die tweede is 'n ronde geleier met dieselfde omtrek as dié van die modelspoor. Beide die spore was van geelkoper en 3 meter lank.

Die kortsluitangsimpedansies word in figure 4 en 5 getoon en toon goeie ooreenstemming binne die meetakkuraatheid van die opstelling wat gebruik is.

5. IMPEDANSIE VAN DIE SPOOR

Met 'n ekwivalente ronde geleier vir die spoor gevind, kan uitdrukkinge vir die interne en eksterne impedansie van die spoor nou gevind word deur die toepassing van Maxwell se vergelykings vir ronde spore bokant 'n geleidende grondoppervlak.

5.1 Interne impedansie

Die oplossings van Maxwell se vergelykings lewer 'n uitdrukking in terme van besselfunksies vir die interne impedansie van die spoor,⁴ naamlik:

$$z_1 = \frac{1}{\pi \sigma_1 a^2} \cdot j \frac{\gamma_1 a}{2} \left[\frac{J_0(j\gamma_1 a)}{J_1(j\gamma_1 a)} \right] \quad (1)$$

$$\text{met } \gamma_1 = \sqrt{j\omega\mu_1\sigma_1 - \omega^2\epsilon_1\mu_1}$$

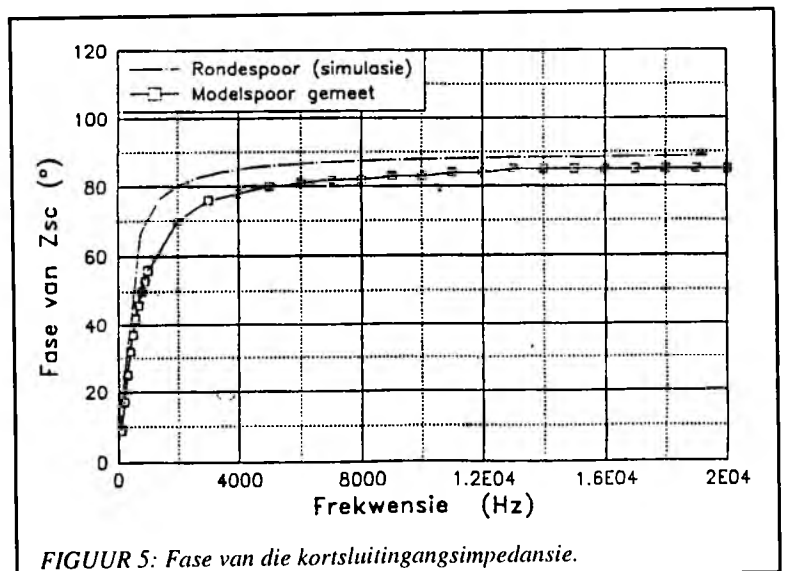
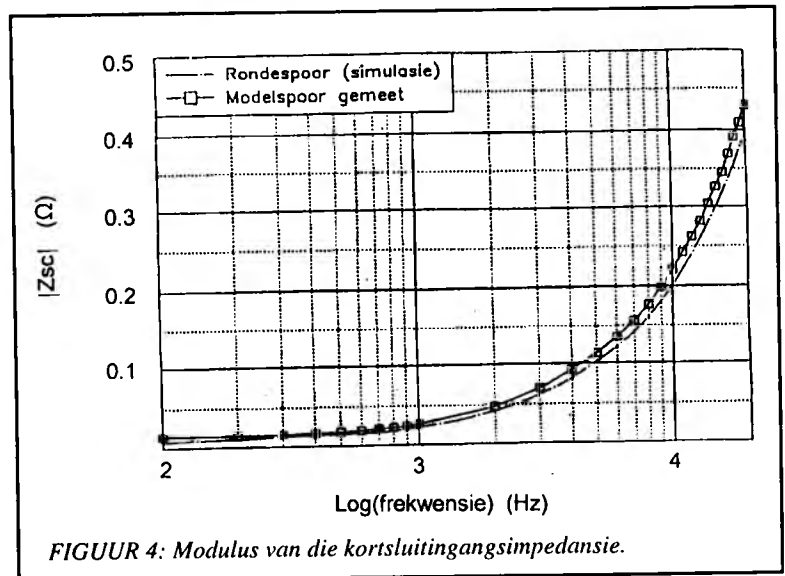
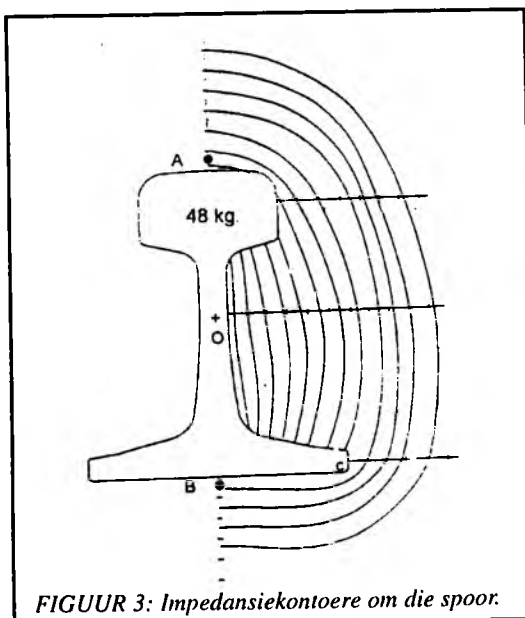
By hoë frekwensies (waar $\gamma_1 a > 2.5$) kan vergelyking (1) benader word deur die volgende uitdrukking:⁴

$$z_1 = \frac{\sqrt{2\omega\mu_1\sigma_1}}{4\pi\sigma_1 a} + j\omega \left[\frac{\sqrt{2\mu_1\sigma_1/\omega}}{4\pi\sigma_1 a} \right] \quad (2)$$

In vergelyking (2) verteenwoordig die reële gedeelte die weerstand van die spoor en die imaginêre geleelte die reaktansie. By lae frekwensies word die weerstand en die induktansie van die spoor onderskeidelik gegee deur:⁵

$$R_1 = \frac{1}{\sigma_1 \pi a^2} \quad (3)$$

$$L_1 = \frac{\mu_1}{8\pi} \quad (4)$$



5.1.1 Meting van die interne impedansie

Volgens die prosedure waarmee die ekwivalente ronde geleier bepaal word, word die interne impedansie van die spoor gelykgestel aan die maksimum oppervlakimpedansie van die spoor. Met die geleidingsvermoë van die spoor bekend, kan die permeabiliteit van die spoor dus bepaal word. Die resultate van hierdie metings, vir 'n UIC-A tipe spoor, word in figuur 6 getoon.

Uit figuur 6 is dit duidelik dat die impedansie van die spoor verander met spoorstroom. Dit is omrede die spoor magneties is en deur die stroom gemagnetiseer word.⁶ Die permeabiliteit, en die verandering daarvan met spoorstroom is volgens vergelyking (2) bereken en word in figuur 7 getoon.

5.2 Eksterne impedansie van die spoor

Die eksterne impedansie van die spoor ontstaan as gevolg van die magnetiese vloed buite die geleier en word nie deur die materiaal van die spoor, soos in die geval van die interne impedansie, beïnvloed nie. Dit is slegs 'n funksie van die geometrie van die spore en die eienskappe van die grond. By die frekwensies en spoorstroombaanlengtes waarby normaalweg gewerk word, bestaan die eksterne impedansie slegs uit die eksterne inductansie, en word deur vergelyking (5) gee.⁴

$$L_e = \frac{\mu_2}{2\pi} \ln\left(\frac{2b}{a}\right) \quad (5)$$

5.3 Admittansie van die spoorbaan

Die admittansie tussen die spore bestaan uit die konduktansie en kapasitansie tussen die spore. By die frekwensies wat normaalweg vir die spoorstroombane gebruik word, is die kapasitansie gewoonlik weglaatbaar en die konduktansie die oorheersende faktor. Die uitdrukkings hiervoor word ook verkry deur die oplossing van Maxwell se vergelykings⁴ en word hieronder weergegee.

$$G = \frac{\pi\sigma_2}{\ln\left(\frac{2b}{a}\right)} \quad (6)$$

$$C = \frac{\pi\epsilon_2}{\ln\left(\frac{2b}{a}\right)} \quad (7)$$

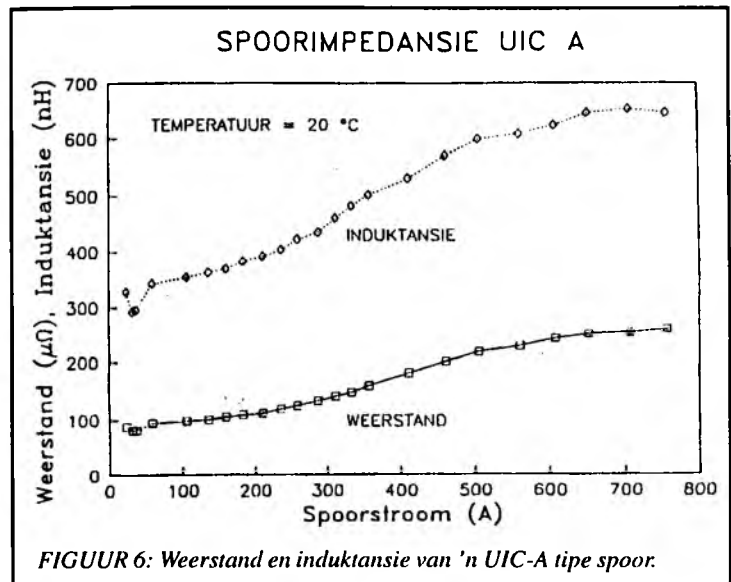
5.4 Kontrolering van die modelle vir die impedansies van die spoorbaan

Die geldigheid van die modelle vir die impedansies van die spoorbaan is gekontroleer deur eksperimentele metings op 'n toetstrajek uit te voer. Die kortsluit- en opebaan-ingangsimpedansie van die spoor is by verskillende frekwensies gemeet, waarna die parameters R, L, G en C bereken is deur gebruik te maak van die volgende transmissielynvergelings:^{7,13}

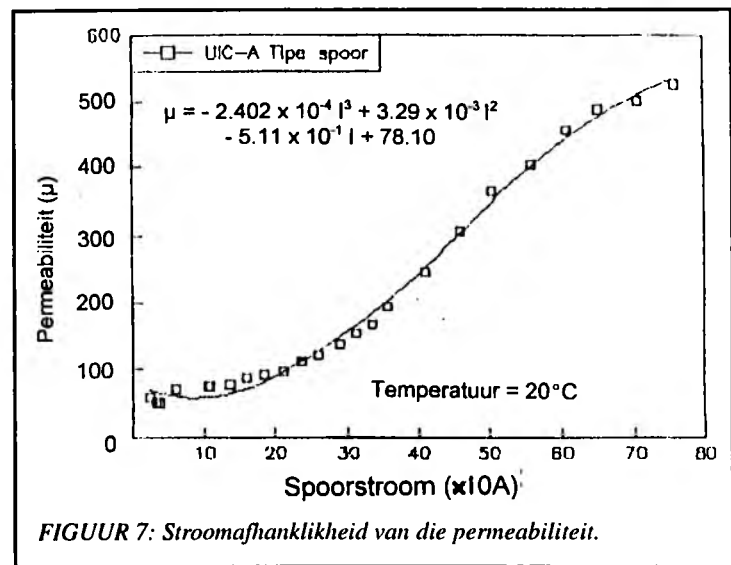
$$Z_0 = \sqrt{Z_{oc} \cdot Z_{sc}} \quad (8)$$

$$\tanh \gamma l = \sqrt{\frac{Z_{sc}}{Z_{oc}}} \quad (9)$$

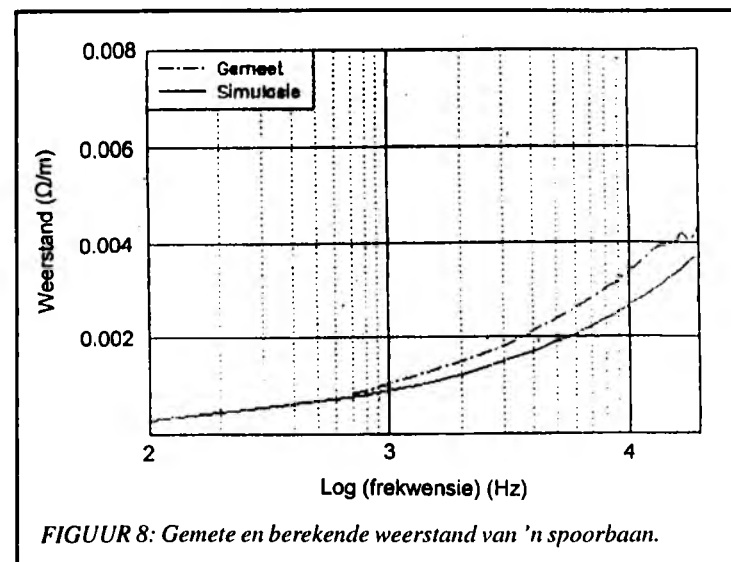
$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad (10)$$



FIGUUR 6: Weerstand en inductansie van 'n UIC-A tipe spoor.



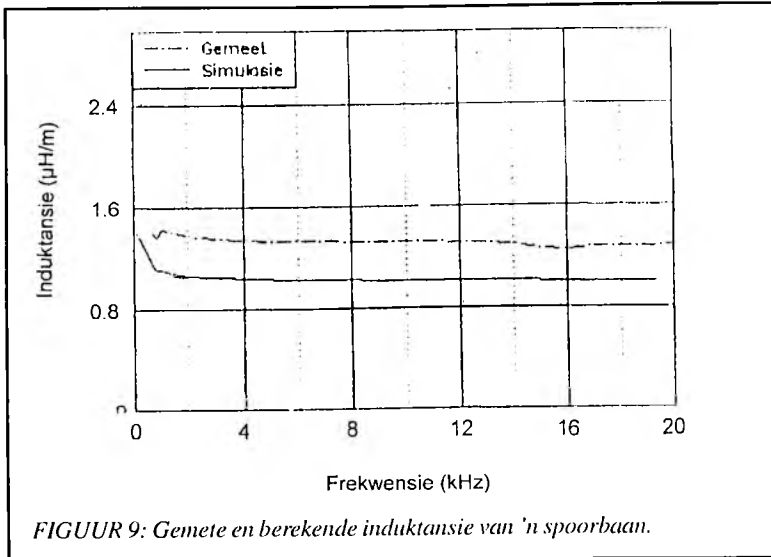
FIGUUR 7: Stroomafhanklikheid van die permeabiliteit.



FIGUUR 8: Gemete en berekende weerstand van 'n spoorbaan.

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L) \cdot (G + j\omega C)} \quad (11)$$

Die weerstand en die inductansie van die spoor is met behulp van die modelle bereken en word in figuur 8 en 9 saam met die gemete resultate op dieselfde assestelsel voorgestel. Die verskil in inductansie in figuur 9



word veroorsaak deurdat die relatiewe permeabiliteit van die grond groter is as een vir die meettrajek. Die berekende waarde is gedoen deur aan te neem dat die relatiewe permeabiliteit van die grond $\mu_r = 1$ is. Indien die permeabiliteit van die grond (μ_2 in vergelyking (5)) aangepas word om 'n groter relatiewe permeabiliteit te hê, sal die berekende en gemete induktansie baie beter ooreenstem.

6. MODELLERING VAN DIE IMPEDANSIES IN DIE TREKKRAGSTELSEL

Die impedansies van die stelsel van geleiers in die trekkragselsel word benodig vir die berekening van die verspreiding van trekkragsstrome. In die wisselstroomgeval speel die interne, eksterne en wedersydse impedansies 'n groot rol. In die model vir die berekening hiervan word die geleiers (spore

ingesluit) van die trekkragselsel elk as 'n stroombaan met 'n aard-truigeleier beskou. Verder word die konsep van 'n ideale aardvlak op 'n komplekse diepte p onder die grond ingevoer⁸ (sien figuur 10).

Die gebruik van 'n komplekse diepte is nodig sodat die eksterne impedansie van die geleier ook die grondweerstand-komponent van die genoemde stroombane in berekening kan bring. Figuur 11 toon die relatiewe posisies van die betrokke geleiers.

Beskou die k_{dc} en q_{dc} geleier van die stelsel soos aangedui in figuur 12. Omdat die twee geleiers elk, tesame met die aardvlak, 'n geslote lus vorm, is daar self- sowel as wedersydse induktansies betrokke.

Die selfimpedansie en wedersydse impedansie van die twee geleiers word bereken deur die volgende twee vergelykings:⁸

$$Z_s = \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \ln \left[\frac{2(h+p)}{a_k} \right] \tag{12}$$

$$Z_m = \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \ln \left[\frac{\sqrt{(h_q + h_k + 2p)^2 + d^2_{kq}}}{\sqrt{(h_q - h_k)^2 + d^2_{kq}}} \right] \tag{13}$$

7. TREKKRAGSTROOMVERSPREIDING

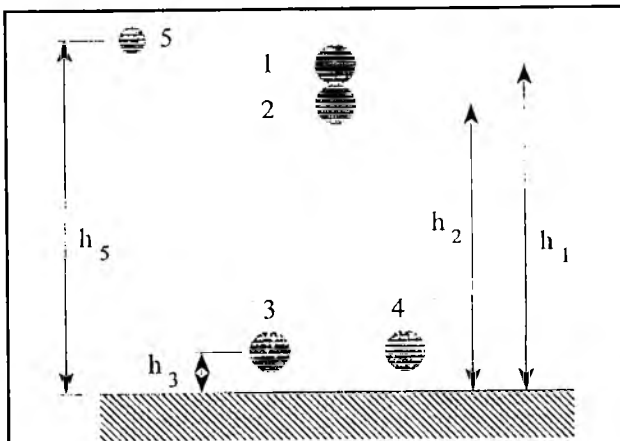
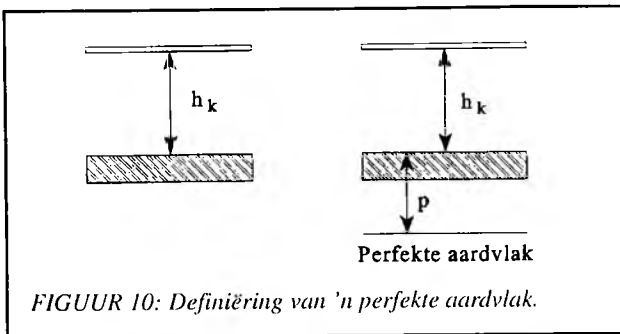
Die verspreiding van trekkragsstrome word weens twee redes benodig, naamlik

- (a) vir die berekening van die interne impedansies van die spoor, aangesien dit 'n funksie van die spoorstroom is;
- (b) vir die berekening van die sturings op spoorstroombane.

Afsonderlike modelle vir gelyk- en wisselstroomverspreiding is ontwikkel. Die gelykstroom-model is geldig oor die totale afstand tussen die lokomotief en die substasie. In die wisselstroomgeval is twee modelle van toepassing. Die eerste is geldig oor 'n voorafbepaalde afstand vanaf die lokomotief en substasie terwyl die tweede vir die oorblywende gedeelte van die trajek geld. Vir die toepassing in spoorstroombane is die laasgenoemde wisselstroommodel in die meeste gevalle voldoende.

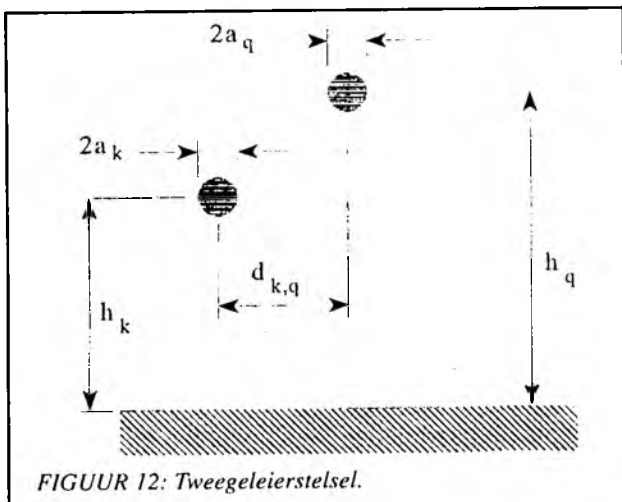
7.1 Gelykstroommodel

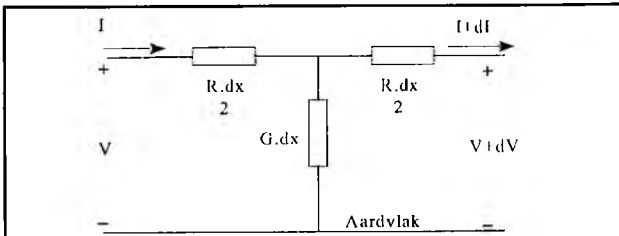
In die gelykstroomgeval word die spoor in terme van die weerstand per eenheidslengte en 'n konduktansie na die aardvlak



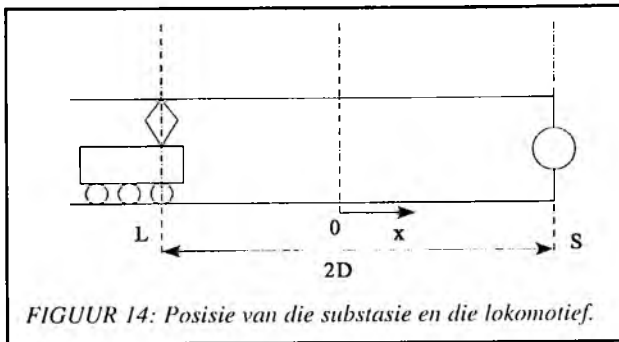
In die figuur is
1 Voerdraad; 2 Kontakdraad; 3,4 Spore; 5 Aarddraad.

FIGUUR 11: Trekkraggeleiers.

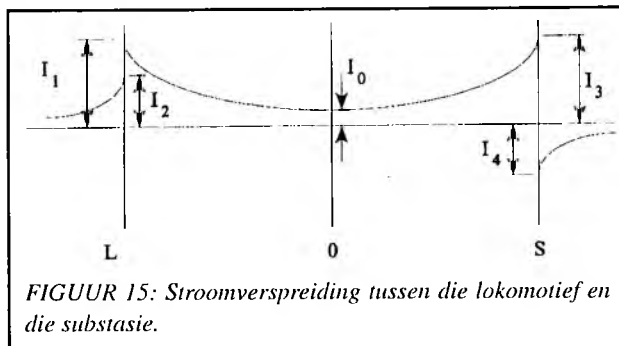




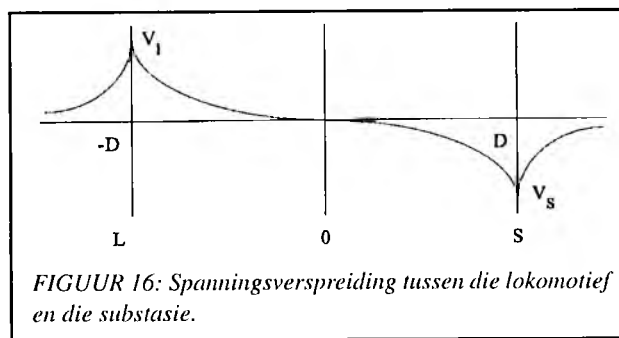
FIGUUR 13: Ekwivalente model vir 'n kort gedeelte van die spoor.



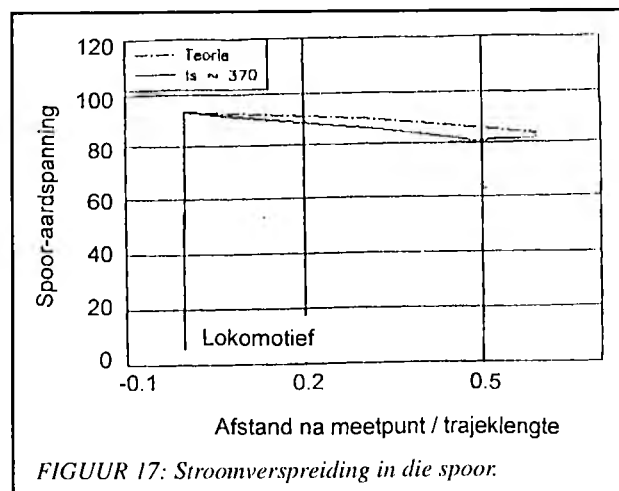
FIGUUR 14: Posisie van die substasie en die lokomotief.



FIGUUR 15: Stroomverspreiding tussen die lokomotief en die substasie.



FIGUUR 16: Spanningsverspreiding tussen die lokomotief en die substasie.



FIGUUR 17: Stroomverspreiding in die spoor.

gemodelleer. Dit word in figuur 13 getoon. Die posisies van die lokomotief en die substasie word in figuur 14 getoon.

Deur differensiaalvergelykings hiervoor op te stel en aan die hand van die randvoorwaardes op te los, word die volgende vergelykings vir die strome en spannings verkry: ^{9,10}

- (a) Stroom- en spanningverspreiding tussen die substasie en die lokomotief.

$$I(x) = \frac{I_1}{\cosh \gamma D + \sinh \gamma D} \cosh \gamma x \quad (14)$$

$$V(x) = \frac{I_1 Z_0}{\cosh \gamma D + \sinh \gamma D} \sinh \gamma x \quad (15)$$

- (b) Stroom en spanning aan weerskante van die lokomotief en substasie.

$$I(x) = \frac{I_1 \sinh \gamma D}{\cosh \gamma D + \sinh \gamma D} e^{-\gamma(x-D)} \quad (16)$$

$$= \frac{I_1}{\coth \gamma D + 1} e^{-\gamma(x-D)} \quad (17)$$

$$V(x) = \frac{I_1 Z_0 \sinh \gamma D}{\cosh \gamma D + \sinh \gamma D} e^{-\gamma(x-D)} \quad (18)$$

$$= \frac{I_1 Z_0}{\coth \gamma D + 1} e^{-\gamma(x-D)} \quad (19)$$

Hierdie vergelykings word in figuur 15 en 16 voorgestel.

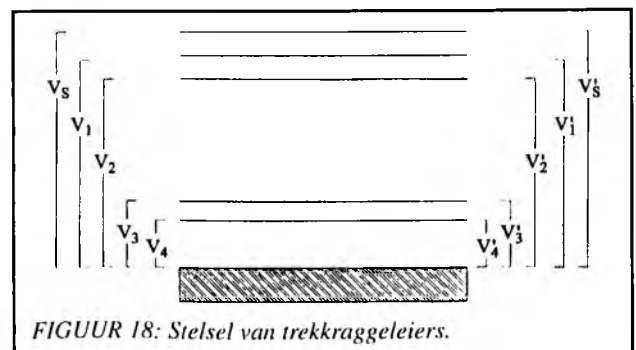
Die gelykstroombelasting is met eksperimentele metings gekontroleer en toon goeie ooreenstemming, binne die meetakkuraatheid van veranderlikes soos grondgeleidingsvermoë en stroom. Die teoretiese en gemete resultate van die stroom in die spoor word in figuur 17 getoon.

7.2 Stroomverspreiding vir wisselstroom

7.2.1 Stelselimpedansies

Beskou die geleiers van figuur 11 hierbo, maar in die lengte voorgestel, soos in figuur 18 getoon word.

Die spannings $V_1 \dots V_5$ is die spannings wat tussen die aarde en die onderskeie geleiers ontstaan. V_3 en V_4 is byvoorbeeld die spoor-aardspannings by die ingang van die trajek onder beskouing. So ook is V_3' en V_4' die spoor-aardspannings aan die einde van die trajek. Aan die hand van figuur 18 kan die spannings aan die ingang van die trajek in terme van die stroom, impedansies en die spanning aan die einde van die trajek geskryf word as: ¹¹



FIGUUR 18: Stelsel van trekkraggeleiers.

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & Z_{14} & Z_{15} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & Z_{24} & Z_{25} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} & Z_{34} & Z_{35} \\ Z_{41} & Z_{42} & Z_{43} & Z_{44} & Z_{45} \\ Z_{51} & Z_{52} & Z_{53} & Z_{54} & Z_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V'_1 \\ V'_2 \\ V'_3 \\ V'_4 \\ V'_5 \end{bmatrix} \quad (18)$$

In vergelyking 18 is

$$Z_{kq} = Z_1 + \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \ln \left[\frac{2(h+p)}{a_k} \right] \text{ vir } k = q \quad (19)$$

en

$$Z_m = \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \ln \left[\frac{\sqrt{(h_q + h_k + 2p)^2 + d_{kq}^2}}{\sqrt{(h_q - h_k)^2 + d_{kq}^2}} \right] \text{ vir } k \neq q \quad (20)$$

met a_k die radius van die kde geleier en Z_1 die interne impedansie daarvan.

Vir die berekening van die stroomverspreiding is dit nodig om te weet of die stroom net in een of albei die spore vloei. Hier word die volgende aannames gemaak om die oplos van vergelyking (18) moontlik te maak:¹²

- (a) Die spoor wat vir trugeleiding gebruik word, is deurgaans aan die grond verbind, en geen spanning bestaan dus tussen die spoor en die aardvlak nie.
- (b) Die geïsoleerde spoor is heeltemal van die aarde geïsoleer.

7.3 Berekening van die stroomverspreiding

Om die stroom te verkry, moet die inverse van die impedansiematriks in vergelyking (18) bereken word, en deur verder die betrokke randvoorwaardes toe te pas volg dat:¹¹

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & Z_{14} & Z_{15} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & Z_{24} & Z_{25} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} & Z_{34} & Z_{35} \\ Z_{41} & Z_{42} & Z_{43} & Z_{44} & Z_{45} \\ Z_{51} & Z_{52} & Z_{53} & Z_{54} & Z_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Die totale stroom wat in die bobaan vloei, word gegee deur $I_1 + I_2$ en dus kan die gedeelte van die stroom wat in die voerdraad vloei, bepaal word, naamlik:

$$\frac{I_1}{I_1 + I_2} = \frac{Y_{11}}{Y_{11} + Y_{21}} \quad (22)$$

Netso kan die stroom wat in die ander geleiers vloei, bepaal word deur:

$$\frac{I_k}{I_1 + I_2} = \frac{Y_{k1}}{Y_{11} + Y_{21}} \quad (23)$$

Die gedeelte van die stroom wat in die grond vloei, kan ook bereken word, aangesien dit die verskil tussen die totale bobaanstroom en die som van die strome in die spore en die aardgeleier, is. Dus volg dat

$$I_g = I_1 + I_2 - (I_3 + I_4 + I_5) = Y_{11} + Y_{21} - (Y_{31} + Y_{41} + Y_{51}) V_1 \quad (24)$$

Hieruit volg nou dat die gedeelte van die totale stroom wat deur die aarde terugvloei, gegee word deur:

$$\frac{I_g}{I_1 + I_2} = \frac{Y_{11} + Y_{21} - (Y_{31} + Y_{41} + Y_{51}) V_1}{Y_{11} + Y_{21}} \quad (25)$$

8. MODELLE VIR DIE SPOORSTROOMBAAN

Modelle vir die nodige insette vir die spoorstroombaanmodelle is nou afgelei en daar kan nou voortgegaan word om die verskillende spoorstroombaanmodelle te beskou.

8.1 Transmissielynmodel

Soos voorheen genoem, kan die spoorbaan as 'n transmissielyn beskou word. 'n Lengte dx van die spoorbaan word in figuur 19 voorgestel. Die vergelykings van toepassing op die model word ook gegee.¹⁰

Karakteristieke impedansie

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad (26)$$

Voortplantingskonstante

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L) \cdot (G + j\omega C)} \quad (27)$$

Ingangsimpedansie

$$Z_i = Z_0 \frac{Z_r \cosh \gamma l + Z_0 \sinh \gamma l}{Z_0 \cosh \gamma l + Z_r \sinh \gamma l} \quad (28)$$

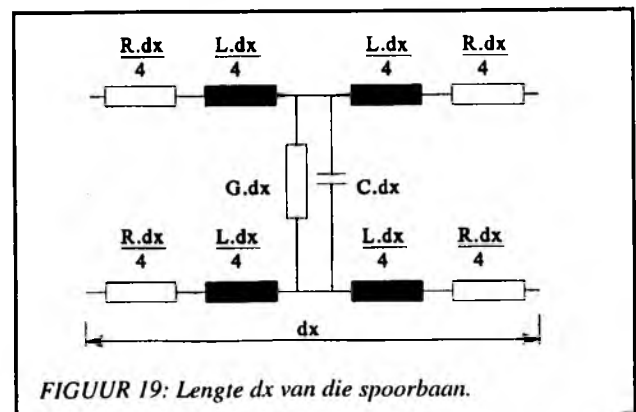
Spanning en stroom as 'n funksie van die afstand vanaf die bron.

$$V(x) = V_s \cosh \gamma x - I_s Z_0 \sinh \gamma x \quad (29)$$

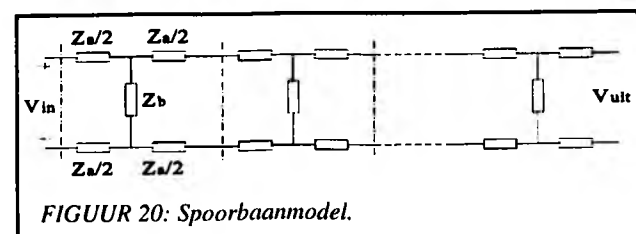
$$I(x) = I_s \cosh \gamma x - \frac{V_s}{Z_0} \sinh \gamma x \quad (30)$$

8.2 Numeriese model met behulp van transmissiematrikse

Die spoorbaan kan ook voorgestel word as 'n aantal vierklemnetwerke in kaskade gekoppel, soos in figuur 20 getoon word.



FIGUUR 19: Lengte dx van die spoorbaan.



FIGUUR 20: Spoorbaanmodel.

Die ingangspanning en ingangstroom kan in terme van enige aantal van die vierklemnetwerke en die uitgangspanning en stroom van die laaste netwerk geskryf word, naamlik:

$$\begin{bmatrix} V_{In} \\ I_{In} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_{uit} \\ I_{uit} \end{bmatrix} \quad (31)$$

Die elemente A, B, C en D word in terme van die primêre transmissielynkonstantes bereken volgens die volgende uitdrukkings, P die lengte van die vierklemnetwerk.

$$A = D = \left[\frac{1}{2} (RG - \omega^2 LC) P^2 + 1 \right] + j \left[\frac{1}{2} \omega (RC + G) P^2 \right] \quad (32)$$

$$B = RP \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{R^2 G}{2} - \omega^2 L \left(\frac{LG}{2} + RC \right) \right] P^3 + j\omega \left[LP \cdot \frac{1}{2} (RLG + \frac{R^2 C}{2} - \omega^2 \frac{L^2 C}{2}) P^3 \right] \quad (33)$$

$$C = GP + j\omega CP \quad (34)$$

Indien enige gekonsentreerde element op 'n gegewe posisie oor die spoorbaan gekoppel word, word 'n transmissiematriks daarvoor opgestel en by die betrokke matriks gevoeg. Sodoende word die effek van dié element ook in ag geneem.

Beskou as 'n voorbeeld hiervan 'n kapasitor wat by die uitgangsklemme van die k_{dc} vierklemnetwerk gekoppel word, soos in figuur 21 getoon. Die transmissiematriks vir hierdie netwerk word dan herskryf deur die invloed van die kapasitor in ag te neem.

Vanuit figuur 21 kan die transmissiematriks T_c vir die kapasitor neergeskryf word as

$$T_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_c} & 1 \end{bmatrix} \quad (35)$$

en die matriks vir die k_{dc} vierklemnetwerk word dan gegee deur die produk van die transmissiematriks van die k_{dc} element en die van die kapasitor.

$$T_k = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j\omega C & 1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

of

$$T_k = \begin{bmatrix} A + (j\omega C_k) \cdot B & B \\ B + (j\omega C_k) \cdot D & D \end{bmatrix}$$

8.3 Ekwivalente netwerk vir die spoorstroombaan

Indien daar slegs in die strome by die in- of uitgang van die spoorstroombaan belang gestel word, kan die spoorstroombaan vervang word met 'n ekwivalente "T"- of "PI"-netwerk. Die impedansies van die netwerk-takke kan dan in terme van die primêre transmissielynkonstantes bereken word soos in figuur 22 getoon is.

8.4 Spoorstroombaansteuringsmodel

Om 'n meer toepaslike model te verkry, word die geval van 'n dubbelyn beskou. Die model is net so toepasbaar vir die enkellyngeval aangesien die aantal geleiers onder beskouing net minder word. Die geleiers in die trekkragselsel van 'n dubbelyn word in figuur 23 getoon.

In die figuur is :

1,3 die voerdrade; 2,4 die kontakdrade; 5..8 die spore.

Die verspreiding van die trekkragsrome word in die model as bekend beskou en word bereken soos hierbo in paragraaf 7 genoem is.

Om die steurings op die spoorstroombaan te bereken, word die spore elk beskou as 'n afsonderlike stroombaan met 'n aardtrugeleier. Die dubbelyn kan na 'n enkellyn gereduseer word deur die effek van die ander geleiers as spannings, wat in die spoor geïnduseer word, te modelleer. Die differensiaalvergelikings vir die oorblywende twee spore kan dan opgestel en aan die hand van gegewe randvoorwaardes opgelos word.

Die genoemde spannings word in die twee spore geïnduseer as gevolg van die strome in die bobaan, sowel as gevolg van die strome in die spore van die ander lyn. Hierdie spannings moet vooraf bepaal word.

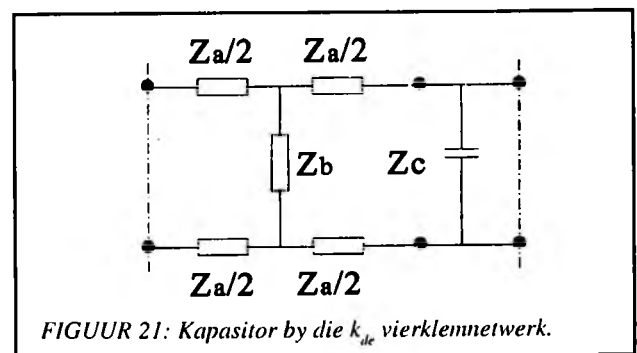
Aan die hand van die voorafgaande word die elektriese model, in figuur 24, vir die oorblywende spore verkry.

Aan die hand van die voorafgaande figuur kan die differensiaalvergelikings vir die spore 1 en 2 neergeskryf word.¹²

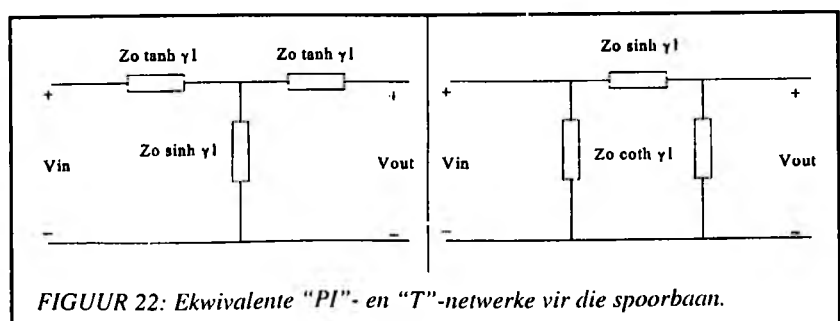
Spoor nummer 1:

$$T_k = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j\omega C & 1 \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$\frac{dI_1}{dx} = Y_1 I_1 \quad (39)$$



FIGUUR 21: Kapasitor by die k_{dc} vierklemnetwerk.

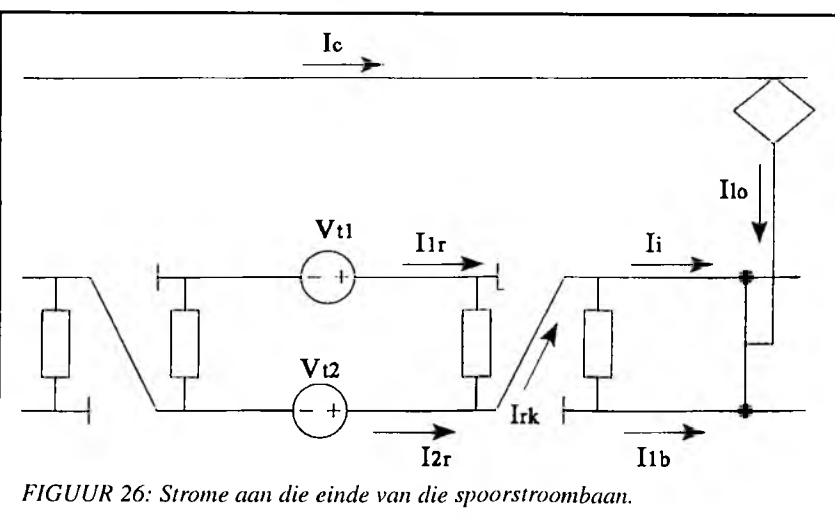
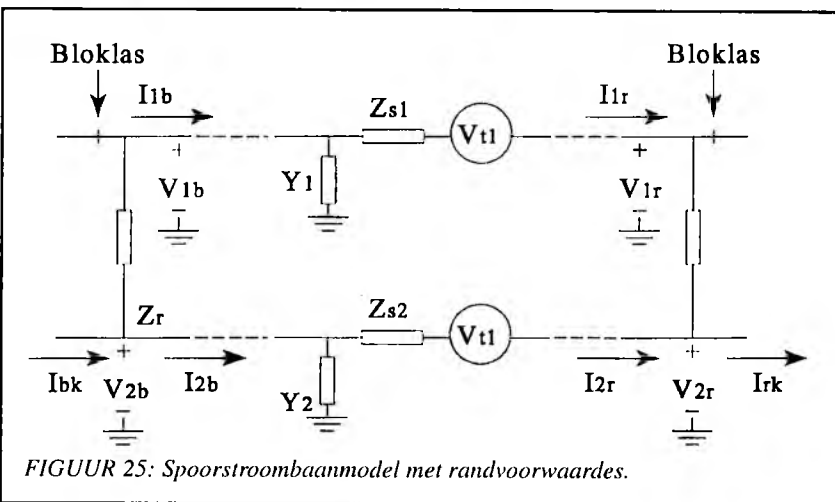
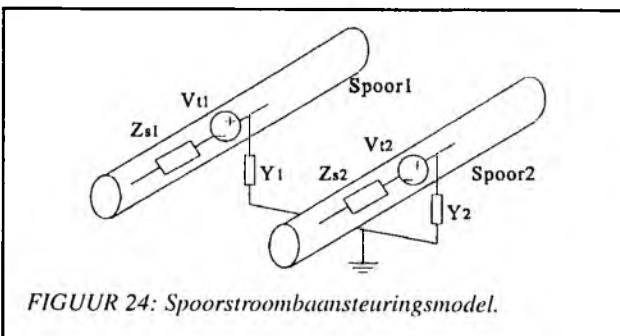
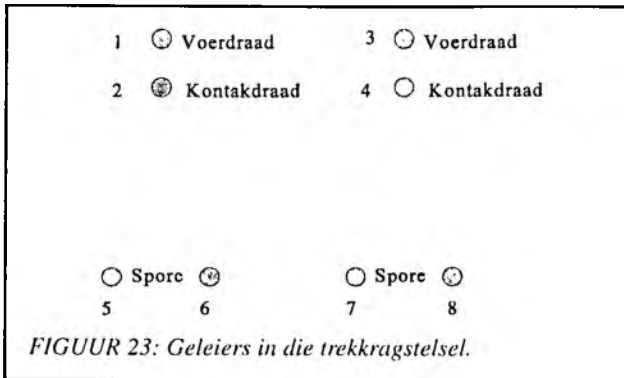


FIGUUR 22: Ekwivalente "PI"- en "T"-netwerke vir die spoorbaan.

Spoor nummer 2:

$$\frac{dV_1}{dx} = Z_{s2} I_2 + Z_{21} I_1 + V_{t2} \tag{40}$$

$$\frac{dI_2}{dx} = Y_2 I_2 \tag{41}$$



Om die stel differensiaalvergelykings op te los, moet die randvoorwaardes vir gewone omstandighede eers bepaal word.

8.4.1 Randvoorwaardes

By die bepaling van die randvoorwaardes word twee aannames ten opsigte van die spoor gemaak, ¹² naamlik:

- (1) Die spoor wat vir trugeleiding gebruik word, is volledig geaard.
- (2) Die geïsoleerde spoor is volledig geïsoleer.

Twee gevalle van trugeleiding kan in die praktyk voorkom, naamlik die trugeleiding kan deur middel van een of albei die spore geskied. Figuur 25 toon die verbindings van 'n spoorstroombaan in die geval waar net een van die spore vir trugeleiding gebruik word.

Vanaf die figuur kan die volgende verbande vir die stroom en die spanning by die bron en ontvanger neergeskryf word.

Vir die bron:

$$V_{1b} + Z_b \cdot I_{1b} - V_{2b} = 0 \tag{42}$$

$$I_{1b} + I_{2b} = I_{bk}$$

en by die ontvanger is

$$V_{1r} - Z_r \cdot I_{1r} - V_{2r} = 0$$

$$I_{1r} + I_{2r} = I_{rk}$$

Vergelykings (42) tot (45) is die algemene randvoorwaardes, by die bron en die ontvanger van die spoorstroombaan. Dit word verder beïnvloed deur die posisie van die lokomotief en 'n spesifieke geval word beskou.

8.4.2 Lokomotief buite die spoorstroombaan, aan die ontvangkant van die spoorstroombaan

Beskou die geval waar die lokomotief die aangrensende seksie beset. Hierdie situasie word in figuur 26 aangetoon.

Beskou die voorwaardes by die ontvanger van die spoorstroombaan. Die stroom wat hier by die spoorstroombaan uitvloei, bestaan uit twee komponente. Die eerste hiervan (*I_i*) ontstaan as gevolg van induktiewe koppeling en word bereken deur die stroomverspreidingsmodel soos hierbo beskryf is. Indien daar aanvaar word dat die eienskappe van die twee aangrensende spoorbane dieselfde is, met ander woorde, die stroom in die trekragspoor dieselfde is, kan die volgende vergelykings vir die ontvangkant neergeskryf word.

$$I_{rk} - I_i + I_{ib} - I_i + I_{ir} \tag{46}$$

Netso kan die randvoorwaardes by die bron as volg neergeskryf word:

$$I_{sk} - I_i + I_{ir} - I_{ib} + I_i \tag{47}$$

Met *I_{ib}*, en *I_{ir}*, die strome by die bron en ontvanger, in spoor 1 van die aangrensende

spoorstroombane. Met behulp van hierdie voorwaardes kan die differensiaalvergelykings (38) tot (41) opgelos word en die stroom wat deur die ontvanger vloei, bepaal word. Deur dieselfde prosedure te volg, kan die randvoorwaardes vir ander posisies van die lokomotief bepaal word.

9. TOEPASSING VAN DIE MODELLE

Soos voorheen genoem, is die modelle nodig vir die bestudering van die werking van die verskillende tipes spoorstroombane, sowel as vir die bestudering van sturings wat ontstaan as gevolg van moderne lokomotiewe.

So is die resultate wat in die studie verkry is, gebruik om 'n elektroniese ekwivalente van 1 000 m spoorbaan mee te bou; die model word in die laboratorium gebruik wanneer toetse op verskillende tipes spoorstroombane gedoen word. Hierdie toetse is gewoonlik daarop gemik om 'n spesifieke probleem met 'n spoorstroombaan, wat in die praktyk net onder sekere omstandighede plaasvind, te ondersoek. Die ekwivalente spoorbaan is dan ook ontwerp om 'n spoorbaan met relatiewe hoë en/of relatiewe lae grondgeleidingsvermoë na te boots.

Alhoewel sinjaaltoerusting ontwerp word volgens faalveilige beginsels, gebeur dit van tyd tot tyd dat die toerusting na 'n onveilige toestand faal. In hierdie gevalle word 'n formele ondersoek na die oorsaak van die falings geloods. Wanneer so 'n falingsdeur veroorsaak is, is dit baie moeilik om die presiese omstandighede in die praktyk te herkonstrueer, en word die spoorbaanmodelle gebruik. So is aangetoon dat indien sekere trekkragdeurverbindings van die spore verwyder word deur diefstal of watter rede ook al, pulserende strome in die spoor opgewek kan word deur 'n bewegende trein. Die harmonieke van hierdie pulserende strome kan dan ooreenstem met die frekwensie van sekere spoorstroombane, en 'n onveilige mislukking veroorsaak.

Tydens die studie is 'n gerekenariseerde outomatiese meetopstelling ontwikkel om die spoorbaanparameters mee te meet. Sedertdien is gevind dat die meetopstelling ook handig gebruik kan word om die parameters van bane met moeilike operasionele probleme te ondersoek en op te los. Hierdie diens is ook al uitgebrei om sinjaalkabelparameters mee te meet.

SUMMARY

Railway track circuits make use of the running rails as a transmission line to detect the presence of a train. Because of the irregular shape of the rail, the classical transmission line theory cannot be applied directly. An experimental method is discussed, whereby an equivalent round conductor can be found to replace the rail. This method divides the rail impedance into internal and external impedances. The internal impedance of the rail is a function of the material properties, rail current and temperature, while the external impedance is a function of the geometry of the line and the properties of the ground and ballast. This equivalent round conductor enables the use of the analytical expressions derived for the transmission line parameters of lines with round conductors. These expressions are used to calculate rail internal impedance, taking effects such as rail material properties, rail current, frequency and temperature into account. Measurement results obtained from tests on a test track are presented and used to verify the rail models, and the con-

ductance and capacitance of the track.

The application of the track impedance models is discussed in terms of models developed for the distribution of traction current. These models include a model for distribution of d.c. and a model for the distribution of a.c. traction current. These models are used to calculate the distribution between the conductors of the traction system and the earth. Experimental results obtained from a test track are presented.

Secondly track circuit models, making use of track impedances derived are discussed. These models include an analytical track circuit transmission line model and a numerical track circuit model. The numerical model makes use of ABCD transmission matrices and is ideally suited for implementation on a digital computer. These models are useful to study track circuit performance with varying earth and ballast conditions.

Calculation of traction current interference of a track circuit is also discussed. These models require the track circuit transmission line parameters and make provision for various boundary conditions which may exist with different types of track circuits. The paper is concluded with a brief discussion of some of the applications of these models.

LITERATUURVERWYSINGS

1. Tso, S.K. et al. (1981). Attenuation effects of under-track reinforcing on automatic train protection signalling systems, *IEE Proceedings B*, 128 (2), 92-100.
2. Comellini E. (1972). A computer program for determining electrical resistance and reactance of any transmission line. *IEEE Power Engineering Society*, Summer Meeting, July, 308-314.
3. Trueblood, H.M., Washcheck, G. (1933). Investigation of rail impedances, *Electrical Engineering*, Dec., 898-907.
4. Schouten, J.P., V.d. Knaap, A., Kamstra, A.J. (1973). Study of the electrical characteristics of a track circuits, Office for Research and experiment (ORE). *Question A25, Report 2*, Oct., 1-131.
5. Hayt, W.H. (1974). *Engineering electromagnetics*. Third international student edition, (McGraw-Hill, New York, Kogakusha), Chapter 12: Transmission lines, 415-421.
6. Kennelly, A.E. (1916). Experimental researches on the skin effect in steel rails, *Journal of The Franklin Institute*, 182 (2), 135-191.
7. Royal Signals. (1957). Line transmission. In: *Handbook of line communication*. Royal Signals, London, Fourth impression, Chapter 16, 703-748.
8. Deri, A., Tevan, A. Semlyen, A., Castanheira, A. (1981). The complex ground return plane; A simplified model for homogeneous and multi-layer earth return, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, 100 (8), 3686-3693.
9. Elektriese laboratorium. Meet van spoorstaaf tot aardspannings op verskeie seksies, *Elektriese laboratoriumverslag*, (E.LAB) 19/80. (Johannesburg). 1-10.
10. Royal Signals. (1957). Mathematical treatment of line transmission. In: *Handbook of line communication*. Royal Signals, London, Fourth impression, Chapter 17, 749-763.
11. Tylavsky, D.J. (1985). Impedance of track/trolley haulage systems, *Conference Record, IEEE Industry Applications Society Annual meeting* (Toronto), 206-212.
12. ORE. Specialists Committee A122. (1979). Calculation of interference with track circuits due to electric traction. *Question A122, Report DT 91* (Office for Research and Experiments of the international Union of Railways), 1-36.
13. Steyn B.M. (1987). Elektromagnetiese modelle vir elektriese spoorbaanstelsels van die Suid-Afrikaanse vervoerdienste, M.Ing.-verhandeling (Randse Afrikaanse Universiteit, Johannesburg) 181 pp.