

Navorsingsbriewe

Die implementering van 'n kleinste-kwadrates-algoritme vir die frekwensiebepaling van 'n protonpresessiesein

Ontvang 3 Augustus 1995; aanvaar 30 November 1995

UITTREKSEL

'n Voordelige tegniek vir die frekwensiebepaling van 'n tydbepaalde sinusvormige sein in ruis is geïmplementeer. Dit maak gebruik van die metode van kleinste kwadrate en is veral geskik wanneer die frekwensie in die kortste moontlike tyd (in vergelyking met die seinperiode) bepaal moet word, soos die geval is met byvoorbeeld die presessiesein in 'n protonmagnetometer. Die kriterium vir beoordeling van enige tegniek onder laasgenoemde voorwaarde is die minimum meettyd vir 'n gegewe meetfout of die minimum fout vir 'n gegewe meettyd. Die voorgestelde tegniek word met die konvensionele metode vergelyk en die resultate toon 'n aansienlike verbetering.

ABSTRACT

The implementation of a least squares algorithm for estimating the frequency of a proton precession signal
An advantageous signal processing technique for estimating the frequency of a time-limited noisy sinusoidal signal has been implemented. The method is a least squares technique and is especially powerful when the estimation has to be done in the shortest possible time measured in terms of signal period, as is the case with the precession signal present in a proton magnetometer. The criterion for evaluating the performance is the minimum measuring time for a given error or the minimum error for a given measuring time. This technique is compared with the accepted way of measuring and the results show a considerable improvement.

1. INLEIDING

Alhoewel hierdie werk aanvanklik daarop gemik was om 'n optimale tegniek te vind vir die onttrekking van die frekwensie-inligting vanuit die presessiesein van die protonmagnetometer, kan hierdie tegniek sekerlik aangewend word in gevalle waar soortgelyke beperkings heers.

Die tipiese protonpresessiesein is sinusvormig met eksponensiële verval te midde van ruis en kan deur die volgende vergelyking voorgestel word¹:

$$S(t) = Ve^{-\alpha t} \sin \omega_p t + n(t) \dots \dots \dots (1)$$

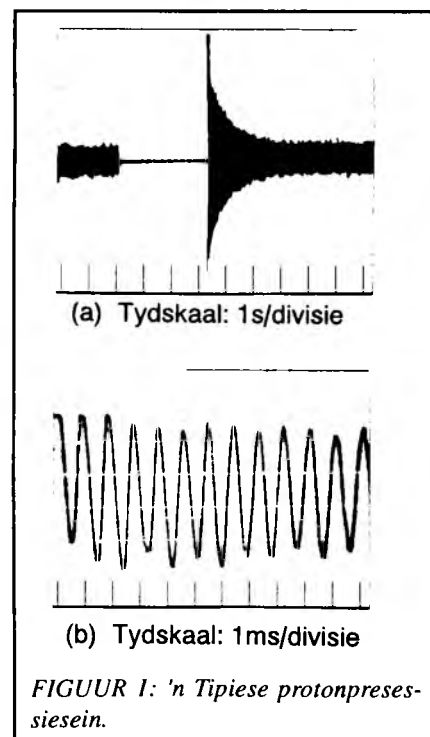
waar $\sin \omega_p t$ die harmoniese funksie is waarvan die frekwensie bepaal moet word, V is die amplitude van die sein, α is die vervalkonstante en $n(t)$ verteenwoordig die ruisterm, 'n stasionêre, ergodiese noubandproses met 'n gemiddelde waarde $M(n)$ van nul en 'n standaardafwyking $\sigma(n)$. 'n Voorstelling van 'n eksperimenteel-bepaalde protonpresessiesein word getoon in figuur 1. Figuur 1(a) is verkry deur die sein te registreer met 'n tydskaal van 1 s/divisie en toon die eksponensiële verval van die seinamplitude totdat dit in die ruis verdwyn. Figuur 1(b) toon 'n kort gedeelte van die sein op 'n tydskaal van 1 ms/divisie en die ruismodulasie is duidelik sigbaar.

Die tydkonstante van die eksponensiële funksie in vergelyking met die seinfrekwensie sal bepaal hoeveel seinperiodes beskikbaar is waarbinne die frekwensie of periode bepaal kan word voordat 'n te swak sein/ruis-verhouding die lesings onbetroubaar maak. Vir die geval van die protonpresessie-magnetometer is 'n tipiese frekwensie ongeveer 1 kHz en die meetproses moet binne een seinwaarneming van ongeveer 1 sekonde afgehandel word met die vereiste van

die beste resolusie en akkuraatheid vir hierdie beperkte tyd.

2. PROBLEEMDEFINISIE

Die hoofdoel met enige gekose meettegniek sou dus wees om die beste estimasie van die parameter ω_p , soos in vergelyking (1) gedefinieer, binne die kortste praktiese waarne-



mingstyd (ongeveer 1 sekonde by die protonmagnetometer) te verkry in die teenwoordigheid van ruis. Bogenoemde doelwit kan bereik word deur die ontleding van 'n stel data wat verkry is deur die bepaling van tydwaardes waarop gekose seinvlakke in die funksie $S(t)$ herhaal. Die spesiale geval van positiewe nulkrusings sal vir die doel van hierdie ontleding gebruik word. In die teenwoordigheid van die ruis-komponent $n(t)$ sal die nulkrusings willekeurige modulase ervaar waarvan die eienskappe 'n funksie sal wees van die ruisparameters.

Die tye waarop die positiewe nulkrusings sal voorkom by die sein sonder ruis vorm die ideale ry $[Z']$ waarvan die waardes eweredig versprei is:

$$t_0^0, t_1^0, \dots, t_p^0, \dots, t_{N_s}^0$$

As gevolg van die additiewe ruiskomponent $n(t)$ sal die posisie van elke punt in laasgenoemde ry verander word deur die volgende willekeurige waardes:

$$\Delta t_0, \Delta t_1, \dots, \Delta t_p, \dots, \Delta t_{N_s} \dots \dots \dots (2)$$

Dit sal dan 'n nie-ideale ry $[Z]$ tot gevolg hê waarvan die punte nie eweredig gespaseer is nie:

$$t_0, t_1, \dots, t_p, \dots, t_{N_s} \dots \dots \dots (3)$$

Die effek van die modulase van die nulkrusings as gevolg van die additiewe ruis $n(t)$ kan soos volg vir die p -de kruising bereken word:

$$\Delta t_p = t_p - t_p^0 \dots \dots \dots (4)$$

Daar kan aangetoon word¹ dat die stel van willekeurige waardes in vergelyking (2), soos verkry uit die verwantskap gegee deur vergelyking (4), 'n standaardafwyking het wat soos volg in terme van die sein/ruis-verhouding ($R_{S/R}$) uitgedruk kan word:

$$\sigma(\Delta t_p) = \frac{T_s}{2\sqrt{2} \pi R_{S/R}} \dots \dots \dots (5)$$

waar T_s die periode van die sinusvormige sein is, gegee deur

$$T_s = \frac{2\pi}{\omega_s}$$

Soos verwag kan word, bestaan daar 'n omgekeerde eweredige verwantskap tussen $\sigma(\Delta t_p)$ en die sein/ruis-verhouding, wat soos volg beskryf kan word:

$$R_{S/R} = \frac{V}{\sqrt{2} \sigma(n)}$$

Teen die agtergrond hierbo geskets, kan die volgende metodes vir die onttrekking van die benodigde inligting aangebied word:

2.1 Metode (a)

Dit is die mees elementêre metode en berus op die meting van die tyd tussen twee opeenvolgende positiewe nulkrusings van die sein, met die volgende resultaat:

$$\begin{aligned} T_a &= t_{p+1} - t_p \\ &= (p+1)T_s + \Delta t_{p+1} - pT_s - \Delta t_p \\ &= T_s + \Delta t_{p+1} - \Delta t_p \end{aligned}$$

waaruit die variansie volg:

$$\sigma^2(T_a) = \sigma^2(\Delta t_{p+1}) + \sigma^2(\Delta t_p)$$

Aangesien Δt_{p+1} en Δt_p ongekorreleerd is, is

$$\sigma(T_a) = \sqrt{2} \sigma(\Delta t_p)$$

2.2 Metode (b)

Die tyd tussen t_0 en t_{N_s} word gemeet en gedeel deur die aantal positiewe nulkrusings (N_s) om 'n gemiddelde waarde van die seinperiode te gee.

$$\begin{aligned} T_b &= [t_{N_s} - t_0]/N_s \\ &= [N_s T_s + \Delta t_{N_s} - \Delta t_0]/N_s \\ &= T_s + [\Delta t_{N_s} - \Delta t_0]/N_s \end{aligned}$$

Aangesien Δt_{N_s} en Δt_0 ongekorreleerd is, volg dat

$$\sigma(T_b) = \sqrt{2} \sigma(\Delta t_p)/N_s$$

Hoe meer seinperiodes dus in aanmerking geneem word, hoe akkurater word die metode, aangesien die standaardafwyking eweredig is aan $1/N_s$.

2.3 Metode (c)

Hierdie metode benut alle gemete tydwaardes van positiewe nulkrusings om T_s te estimateer. Die waardes word verwerk met behulp van die metode van kleinste kwadrate.² Vir 'n stel van gemete waardes (van t_p vir p vanaf 0 tot N_s) word 'n stel van $(N_s + 1)$ vergelykings verkry:

$$t_0 + pT_c = pT_s + \Delta t_p, \quad p = 0, 1, \dots, N_s.$$

Die oplossing van hierdie stel gee die waardes van T_c en $\sigma(T_c)$ [2].

3. IMPLEMENTERING VAN DIE VERWERKINGS-TEGNIEKE

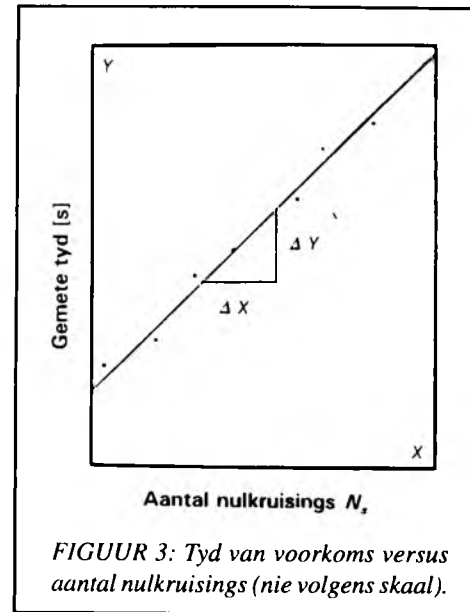
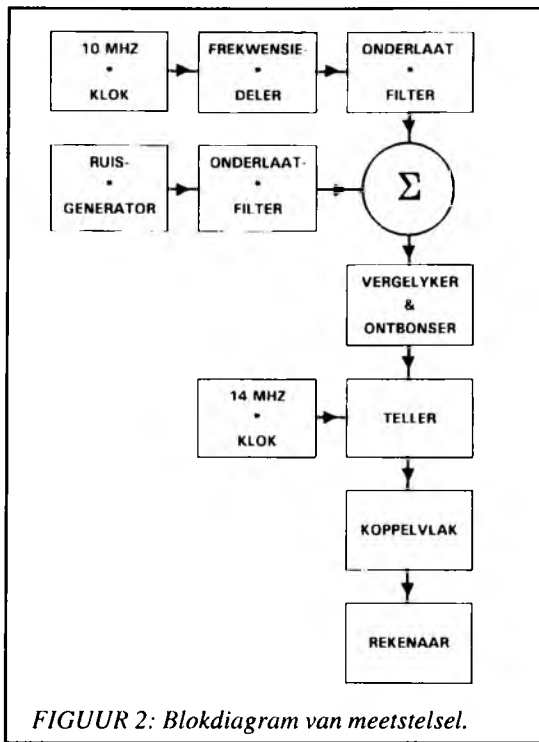
Metode (a) is 'n triviale oplossing vir die meetprobleem en sal nie verder hanteer word nie. Geskikte apparatuur en programmatuur is ontwikkel vir die implementering van metodes (b) and (c). Dit sal nie in besonderhede bespreek word nie, maar die blokdiagram van figuur 2 illustreer die stelselbeginsels.

Die saamgestelde sein beskryf in vergelyking (1) word verkry deur noubandruis te sommeer met 'n sinusvormige sein afkomstig van 'n hoë stabiliteit 10MHz-bron (frekwensie-stabiliteit van 1 deel in 10^6). Die 10MHz-sein word verdeel deur 'n faktor van 2^{13} (8192) en deur 'n onderlaatfilter gestuur, wat resulteer in 'n sinusvormige sein met 'n periode $T_s = 819,2 \mu s$. Die saamgestelde sein word dan die inset tot die nulkrusingsdetektor en ontbonsingsbaan, wat tot gevolg het 'n reeks pulse wat die positiewe nulkrusings verteenwoordig. Die tye waarop die nulkrusings voorkom, word bepaal deur pulse vanaf 'n hoë stabiliteit klokfrekwensie-generator (5 dele per 10^6) te tel. Die data word via 'n geskikte koppelvlak in die rekenaar ingelees en met behulp van die betrokke algoritmes verwerk.

Die implementering van metodes (a) en (b) word vervolgens bespreek.

3.1 Metode (b)

Hierdie metode bereken bloot die gemiddelde waarde van die seinperiode oor 'n gekose aantal periodes N_s . Dit word gerealiseer deur die tyd tussen positiefgaande nulkrusings



by tye t_0 en t_{N_s} te meet en dan te deel deur die aantal periodes N_s . Die resultaat is T_b , wat die beste waarde is, met hierdie metode, vir die seinperiode T_s . Hierdie tegniek is toegepas vir verskillende waardes van N_s vanaf 100 tot 1024. Die waarde van $\sigma(T_b)$ is bereken vanuit 'n stel van T_b waardes wat verkry is deur die proses 1024 keer te herhaal by die verskillende waardes van N_s .

3.2 Metode (c)

Hierdie metode benut alle beskikbare data, dit is alle tye waarop positief-gaande nulkrusings voorkom. Die waardes van hierdie tye vorm 'n ry met punte wat nie eweredig versprei is nie, soos gedefinieer in vergelyking (3). Hierdie datapunte kan grafies teenoor die aantal nulkrusings voorgestel word soos getoon in figuur 3.

Met behulp van die metode van kleinste kwadrate word 'n reguit lyn gepas aan die eksperimentele data. T_c , wat die afskatting van T_s is, kan verkry word vanuit die helling van die reguitlyn, wat gegee word deur ³ :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sum_{n=1}^{N_s} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{n=1}^{N_s} (x_i - \bar{x})^2}$$

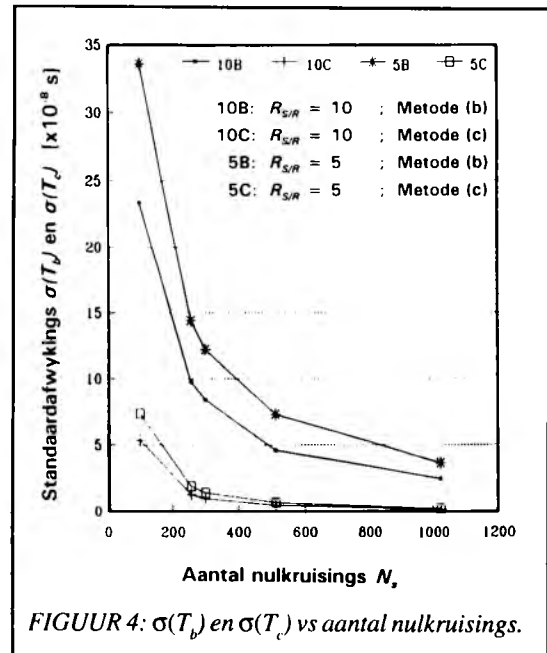
4. RESULTATE

4.1 Gemiddelde en standaardafwyking vir metodes (b) en (c)

Metodes (b) en (c) is geïmplementeer vir sein/ruis-verhoudings van 5 en 10 respektiewelik. Tabel 1 toon die waardes van gemiddeldes en standaardafwykings soos vanuit die eksperimentele data bereken.

4.2 Die invloed van meettyd

Die aantal positiefgaande nulkrusings waarvan die tyd van voorkoms bepaal word, bepaal die meettyd. Figuur 4 toon



$R_{S/R}$	T_b (μs)	$\sigma(T_b)$ (μs)	T_c (μs)	$\sigma(T_c)$ (μs)
10	819,181	$2,4 \times 10^{-3}$	819,2004	$1,5 \times 10^{-2}$
5	819,179	$3,6 \times 10^{-3}$	819,2003	$2,2 \times 10^{-2}$

LET WEL : Die waardes in tabel 1 is verkry vir $N_s = 1024$ en $T_s = 819,2 \mu s$.

die invloed van meettyd op die resolusie van die meetproses. Dit is opmerklik dat by laer waardes van meettyd die tempo van verbetering van resolusie beter is.

5. GEVOLGTREKKINGS

Die probleem van bepaling van frekwensie of periode van 'n sinusvormige sein met ruis binne 'n beperkte tyd, is ondersoek. 'n Tipiese voorbeeld is die presessie sein by die protonmagnetonometer. Meetfoute word in hierdie geval ingevoer as gevolg van fasemodulasie te wyte aan 'n additiewe ruiskomponent.

Twee metodes is geïmplementeer met geskikte apparatuur en gepaste programmatuur. Metode (b) benut slegs 'n gedeelte van die beskikbare data om die gevraagde inligting af te skat, terwyl metode (c) alle beskikbare inligting aanwend (dit is al die tydinligting ten opsigte van die positiefgaande nul kruisings).

Die resultate toon dan ook, soos verwag kon word, dat metode (c), gebaseer op die metode van minimum kwadrate, superieur is teenoor metode (b). Vir 'n gegewe meettyd sal metode (c) 'n kleiner meetfout bevat in vergelyking met metode (b).

G.P. HANCKE

Departement Elektriese en Elektroniese Ingenieurswese,
Universiteit van Pretoria, Pretoria, 0002

LITERATUURVERWYSINGS

1. Hancke, G.P. (1990). The Optimal Frequency Estimation of a Noisy Sinusoidal Signal, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 39, no. 6, 843 - 846.
2. Jackson, D. (1930). *The Theory of Approximation*. Providence, RI: Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. Ser., vol. XI, chapter III.
3. Giordano, A.A. & Hsu, F.M. (1985). *Least Square Estimation with Application to Digital Signal Processing*. (New York: Wiley).