

Navorsings- en oorsigartikels

Verbetering van numeriese modelle met behulp van eksperimentele data

D.Z. Grobler en P.S. Heyns*

Departement Meganiese en Lugvaartkundige Ingenieurswese, Universiteit van Pretoria, Pretoria,
0002

Ontvang 31 Augustus 1994; aanvaar 30 September 1994

UITTREKSEL

Daar is toenemende belangstelling in tegnieke vir die verbetering van numeriese struktuurmodelle met behulp van eksperimentele data. Hierdie werk ondersoek die toepassing van twee fundamenteel verskillende benaderings tot die probleem aan die hand van 'n praktiese toetsgeval. In die een geval word die struktuurmatrikse direk verstel om die eiewaardes en eievektore van die numeriese model in ooreenstemming met gemete waardes te forseer. In die tweede geval word fisiese ontwerpparameters verstel om die ooreenstemming van eiewaardes te verbeter. Alhoewel direkte verstelling van die struktuurmatrikse heelwat eenvoudiger is om te implementeer as verstelling van fisiese ontwerpparameters en ook beter ooreenstemming gee, is die toepassing daarvan beperk as gevolg van die versteuring van die fisiese samehang van die matrikse en daar word aanbeveel dat verdere werk toespits op die verstelling van fisiese parameters.

ABSTRACT

Improvement of numerical models using experimental data

There is a growing interest in techniques for the updating of numerical structural models using experimental data. This work investigates the application of two fundamentally different approaches to the problem through a practical example. In one case the structural matrices are directly adjusted to force the eigenvalues and eigenvectors of the numerical model the same as the measured values. In the second case physical design variables are adjusted to improve the agreement between the eigenvalues. Although the direct adjustment of the structural matrices is much simpler to implement than the adjustment of physical design variables and also leads to better correspondence, the application thereof is restricted because of the changes in the physical structure of the matrices and it is suggested that further research be focused on the adjustment of physical parameters.

INLEIDING

Die dinamiese gedrag van strukture word in die praktyk veral op twee maniere bestudeer, naamlik deur numeriese berekening en deur eksperimentele modale analise. Die numeriese benadering (deur eindige-elementanalise) word baie algemeen gebruik as gevolg van die redelike mate van gerief waarmee die effek van ontwerpveranderings op die dinamiese gedrag van die struktuur ondersoek kan word, selfs voordat die struktuur bestaan. Daarteenoor word algemeen aanvaar dat eksperimentele data, as dit beskikbaar is, normaalweg meer betroubaar is, veral sover dit natuurlike frekwensies van die struktuur betrek. Dit gee aanleiding tot 'n behoefte om eksperimentele data, waar dit beskikbaar sou wees, te gebruik om numeriese modelle te verbeter met die oog op verdere analise.

Die afgelope dekade was daar toenemende belangstelling in modelverbetering.^{1,2} Aanvanklik is veral gekonsentreer op metodes waarvolgens die massa- en stijfheidsmatrikse van strukture direk aangepas word om

die natuurlike frekwensies en modusvorms van die aangepaste stelsel in ooreenstemming met die eksperimentele resultate te bring.³ Meer onlangs is besef dat hierdie werkswyse veranderings in die struktuurmodel veroorsaak wat moeilik in verband gebring kan word met die modelleringsaannames. Gevolglik is begin met die ontwikkeling van fisiese parametermetodes waarmee die numeriese struktuurmodel verstel word deur sogenaamde ontwerpveranderlikes (soos ekwivalente materiaalkonstantes of geometriese veranderlikes) te varieer totdat die berekende en eksperimentele data ooreenstem, eerder as om die struktuurmatrikse (massa- en stijfheidsmatrikse) direk te manipuleer.^{4,5} Sodoende word veranderings met direkte fisiese betekenis in die numeriese model verkry.

Ongeag die geweldige potensiële praktiese waarde van sulke metodes vorm dit egter steeds nie deel van die beskikbare ontwerpgeredeskap van struktuurontwerpers nie, en ontwerpers maak vandag steeds grootliks gebruik van intuïtiewe metodes om 'n mate van ooreenstemming tussen numeriese en eksperimentele gedrag te verkry. Die

* Outeur aan wie korrespondensie gerig kan word.

rede hiervoor is te vind in die talle praktiese probleme wat met die toepassing van die genoemde metodes ondervind word.

In 'n poging om by te dra tot die praktiese ervaring met hierdie metodes, word daar met hierdie werk ondersoek ingestel na die toepassing van twee spesifieke metodes. In die eerste metode word die struktuurmatrikse direk verstel. In die tweede word gepoog om ooreenstemming tussen die numeriese model en die eksperimentele data te verkry deur verstelling van fisiese parameters. Die metodes word kortlik beskryf en daarna word toepassing daarvan op 'n kontinuum-toetsstruktuur wat in terme van 'n eindige-elementbenadering gemodelleer word, bespreek.

Die toepassing behels die uitvoering van 'n eindige-elementanalise asook 'n eksperimentele modale analise, die reduksie van die numeriese data sodat dit direk vergelykbaar is met die eksperimentele data, die implementering van die opdateringsmetodes en 'n evaluasie van die resultate.

Daar word deurgaans aanvaar dat demping verwaarloosbaar is en dat die vibrasiemodusse reëel is. Verder word aanvaar dat die ongekorrigteerde struktuurmatrikse reeds 'n redelike model van die struktuur onder beskouing verteenwoordig.

VERSTELLING VAN STRUKTUURMATRIXSE

As 'n tipiese voorbeeld van direkte verstelling van die struktuurmatrikse word die metode van Berman en Nagy³ beskou. Hulle bereken twee $n \times n$ korreksiematrikse ΔM en ΔK waarmee die ongekorrigteerde numeriese massamatriks M^e en styfheidsmatriks K^e verstel word om verbeterde matrikse M en K te kry:

$$M = M^e + \Delta M \quad K = K^e + (\Delta K + \Delta K^T) \quad (1)$$

n is die orde van die numeriese model.

ΔM word gevind deur minimering van die verskil tussen M en M^e soos uitgedruk deur die verskilfunksie:

$$\epsilon_M = \| (M^e)^{-\frac{1}{2}} (M - M^e) (M^e)^{-\frac{1}{2}} \| \quad (2)$$

en onderhewig aan die vereiste van modale ortogonaliteit en die eievergelyking:

$$\Phi^{xT} M \Phi^x = I \quad K \Phi^x = \lambda^x M \Phi^x \quad (3)$$

waar Φ^x 'n $n \times m$ matriks van gemete massag-normaliseerde modusvorms (eievektore) is en λ^x 'n $m \times m$ diagonaalmatriks is wat die kwadrate van die gemete natuurlike hoekfrekwensies (eiewaardes) bevat. m is die aantal gemete modusse en I is die identiteitsmatriks.

Hieruit volg nou dat^{1,3}

$$\Delta M = M^e \Phi^x M^{-1} (I - M) M^{-1} \Phi^{xT} M^e \quad (4)$$

met $M = \Phi^{xT} M^e \Phi^x$ die genormaliseerde veralgemeende massamatriks.

ΔK word op soortgelyke wyse gevind deur die minimering van

$$\epsilon_K = \| M^{-\frac{1}{2}} (K - K^e) M^{-\frac{1}{2}} \| \quad (5)$$

onderhewig aan modale ortogonaliteit en die eievergelyking:

$$\Phi^{xT} K \Phi^x = \lambda^x \quad K \Phi^x = \lambda^x M \Phi^x \quad (6)$$

Hieruit volg dat

$$\Delta K = (I - \frac{1}{2} M \Phi^x \Phi^{xT}) (\lambda^x M \Phi^x - K^e \Phi^x) \Phi^{xT} M \quad (7)$$

Toepassing van die metode behels eenvoudig die berekening van die korreksiematrikse ΔM en ΔK met behulp van vergelykings (4) en (7).

VERSTELLING VAN FISIESE PARAMETERS

In plaas daarvan om die struktuurmatrikse direk te verstel, kan 'n indirekte benadering gevolg word waardeur bepaalde fisiese parameters verstel word om verbeterde ooreenstemming tussen die numeriese model en die eksperimentele data te verkry. Dit word gedoen deur eers 'n sensitiwiteitsmatriks op te stel en daarna 'n optimeringsalgoritme te gebruik om die beste ooreenstemming tussen die numeriese model en die eksperimentele data te verkry. Om die werkswyse te verduidelik, word die essensie van 'n tipiese metode uit hierdie kategorie hier uiteengesit.^{4,5}

Aanvaar soos voorheen dat die ongekorrigteerde struktuurmatrikse M^e en K^e beskikbaar is. As die struktuur nou uit ℓ substrukture bestaan waarvan gepostuleer kan word dat die aard van die modellingsfout binne die bepaalde substruktuur konstant bly, is

$$M^e = \sum_{i=1}^{\ell} M_i^e \quad K^e = \sum_{i=1}^{\ell} K_i^e \quad (8)$$

waar M_i^e en K_i^e die globale massa- en styfheidsmatrikse van die i de substruktuur is.

Definieer nou foutfaktore m_i en k_i sodat vir enige substruktuur i

$$M_i = m_i M_i^e \quad K_i = k_i K_i^e \quad (9)$$

en

$$M = \sum_{i=1}^{\ell} M_i = \sum_{i=1}^{\ell} m_i M_i^e \quad K = \sum_{i=1}^{\ell} K_i = \sum_{i=1}^{\ell} k_i K_i^e \quad (10)$$

M en K is die verbeterde globale massa- en styfheidsmatrikse. m_i en k_i kan beskou word as korreksiefaktore om die totale energie van die betrokke substruktuur in ooreenstemming te bring met die korrekte waarde,⁴ en moet ideaal gesproke gelyk wees aan 1. Indien m_i of k_i heelwat van 1 sou verskil, is dit 'n aanduiding dat die betrokke substruktuur swak gemodelleer is.

Om nou die omvang van die fout in die oorspronklike ongekorrigteerde model te beraam, laat

$$m_i = 1 + \Delta m_i \quad k_i = 1 + \Delta k_i \quad (11)$$

Hieruit volg dat

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^e + \sum_{i=1}^{\ell} \Delta m_i \mathbf{M}_i^e \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}^e + \sum_{i=1}^{\ell} \Delta k_i \mathbf{K}_i^e \quad (12)$$

'n Eerste-orde Taylor-reeksuitbreiding van die numeries berekende eiewaarde λ_j^e lewer

$$\lambda_j = \lambda_j^e + \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\partial \lambda_j^e}{\partial k_i} \Delta k_i + \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\partial \lambda_j^e}{\partial m_i} \Delta m_i \quad (13)$$

waar λ_j die jde eiewaarde van die verbeterde model is. Dus is

$$\Delta \lambda_j = \lambda_j - \lambda_j^e = S_j \Delta P \quad (14)$$

waar

$$S_j = \left[\frac{\partial \lambda_j^e}{\partial k_1}, \dots, \frac{\partial \lambda_j^e}{\partial k_\ell}, \frac{\partial \lambda_j^e}{\partial m_1}, \dots, \frac{\partial \lambda_j^e}{\partial m_\ell} \right] \quad (15)$$

vir elk van die m modusse onder beskouing, en

$$\Delta P = [\Delta k_1, \dots, \Delta k_\ell, \Delta m_1, \dots, \Delta m_\ell]^T \quad (16)$$

Vergelyking (15) is die eiewaardesensitiwiteitsmatriks en (16) is die korreksievektor.

Soortgelyke vergelykings kan vir die eievektore afgelei word.^{4,5} Dit word ter wille van duidelikheid van die hoofargument nie hier gedoen nie.

Laat nou

$$\Delta W = [\Delta \lambda_1, \dots, \Delta \lambda_m]^T \quad (17)$$

en die Jacobiaan

$$S = [S_1, \dots, S_m]^T \quad (18)$$

waaruit volg dat

$$\Delta W = S \Delta P \quad (19)$$

Die dominante elemente in ΔP verteenwoordig nou óf dominante modelfoute óf relatief onsenitiewe substrukture. Om onduidelikheid hieroor uit te skakel, is dit nodig om 'n sensitiwiteitskoëfisiënt in te voer. Laat s_i nou die i de kolom van die Jacobiaan wees, met i wat geassosieer is met 'n bepaalde substruktur. Laat verder ΔP_i die ooreenstemmende element in ΔP wees, waaruit

$$\Delta w_i = s_i \Delta P_i \quad (20)$$

Hieruit volg die sensitiwiteitskoëfisiënt

$$e_i = \frac{\|\Delta w_i\|}{\|\Delta W\|} \quad (21)$$

Modelfoute kom nou voor waar ΔP_i sowel as e_i groot is.

Omdat die struktuurmatrikse funksies is van fisiese parameters soos digtheid, deursnitoppervlakte en tweede

moment van area kan vergelyking (19) as volg oorgeskryf word:⁵

$$\Delta W = S \Delta P \quad (22)$$

waar

$$S = [S_1, \dots, S_m]^T \quad \Delta P = [\Delta p_1^1, \dots, \Delta p_\ell^1, \dots, \Delta p_1^n, \dots, \Delta p_\ell^n]^T \quad (23)$$

en

$$S_j = \left[\frac{\partial \lambda_j^e}{\partial p_1^1}, \dots, \frac{\partial \lambda_j^e}{\partial p_\ell^1}, \dots, \frac{\partial \lambda_j^e}{\partial p_1^n}, \dots, \frac{\partial \lambda_j^e}{\partial p_\ell^n} \right] \quad (24)$$

waar nu die aantal fisiese parameters p is en m die aantal modusvorms is wat gebruik word in die berekening.

Toepassing van die metode behels in beginsel die berekening van ΔP deur gebruik te maak van die sensitiwiteitsmatriks S en die ooreenstemmende ΔW . Hierna word die ΔP iteratief verstel deur van optimeringsbeginsels gebruik te maak en na elke stap nuwe ΔW en S -matrikse te bereken, totdat $\|\Delta W^{(k)}\| - \|\Delta W^{(k-1)}\| \leq \epsilon$ waar ϵ is 'n konvergensiekriterium en k die iterasienommer is.

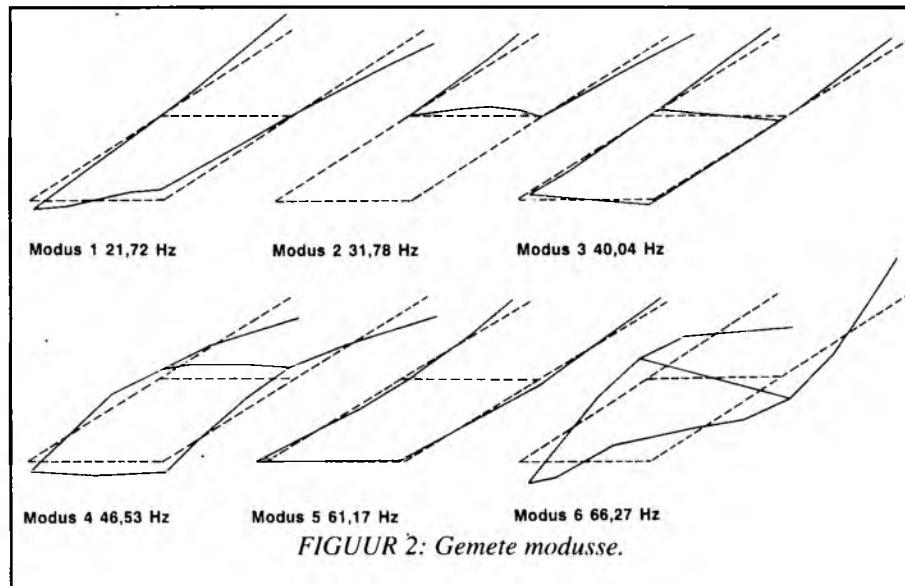
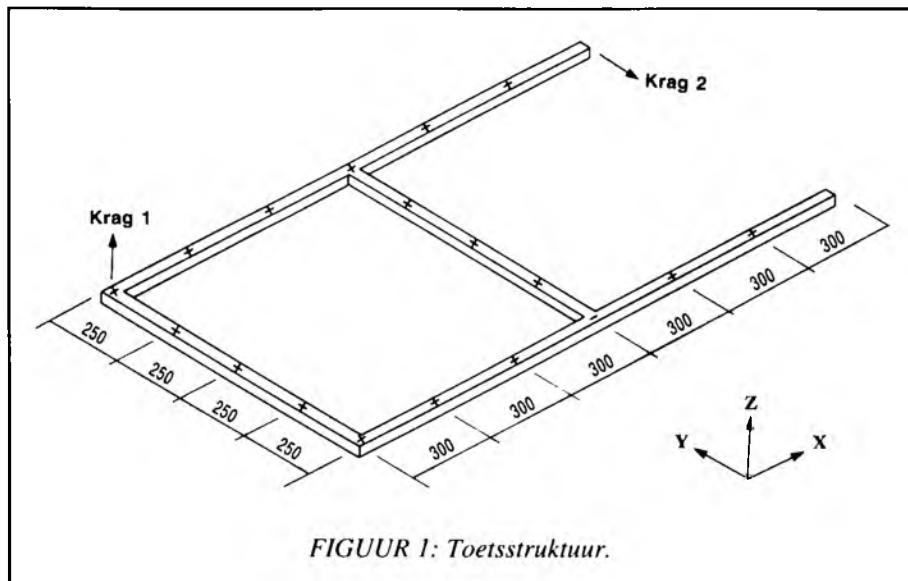
GEVALLESTUDIE

As toetsstruktuur is besluit op 'n A-raam met hoofafmetings van $1,8 \times 1,0$ m (figuur 1).

Die raam is gemaak uit 32×32 mm vierkantige buis met 'n wanddikte van 2 mm. Alle koppelpunte op die raam is gesweis. Met die oog op die eindige-elementanalise is die raam opgedeel in twintig balkelemente met altesaam 120 vryheidsgrade (translasie en rotasie). Om die interaksie tussen die eindige-elementanalise en die eksperimentele modale analise so eenvoudig as moontlik te hou, is 'n eenvoudige eindige-elementprogram wat slegs balkelemente kan hanter, in MATLAB,⁶ 'n programpakket vir numeriese analise, geskryf. Met behulp hiervan is M^e en K^e asook die berekende eiewaardes λ_j^e , $j = 1, \dots, m$ en ooreenstemmende eievektore ϕ_j^e bepaal.

'n Modale toets is daarna op die raam uitgevoer met behulp van 'n GenRad 2515 analyseerde. Die struktuur is kunsmatig opgewek met ongekorreleerde willekeurige kragseine by twee knooppunte deur middel van MODAL 50 elektro-dinamiese aktueerders. Versnellings is in die drie onderling loodregte rigtings gemeet by elk van die knooppunte op die toetsstruktuur. Met behulp van die standaard-multiverwysingspunttegniek wat in die SDRC MPLUS⁷ programmatuur geïmplementeer is, kon die eiewaardes λ_j^x , $j = 1, \dots, m$ en eievektore ϕ_j^x van die struktuur, gebaseer op eksperimentele data, ook bepaal word. Die toetsdata is daarna ook in MATLAB ingevoer en word in figuur 2 afgebeeld in terme van die eerste ses natuurlike modusvorms met hul geassosieerde frekwensies.

In die meeste praktiese gevalle is die aantal vryheidsgrade wat vir die eindige-elementmodel gebruik word, veel groter as die aantal gemete vryheidsgrade. Die meeste verbeteringsmetodes vereis egter een-tot-een ooreenstemming tussen die twee datastelle. Om dié probleem die hoof te bied, kan die eindige-elementmodel

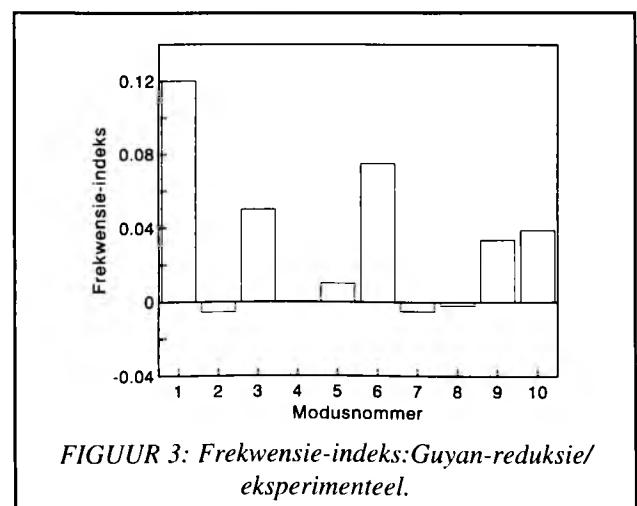


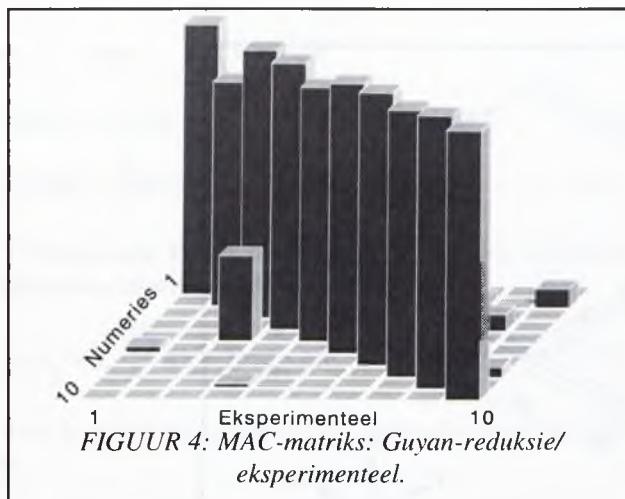
gereduseer word deur die keuse van die meetpuntvryheidsgrade as meesters in terme waarvan die ander vryheidsgrade geskryf word. In hierdie toetsgeval is daar by al die knooppunte drie translasies gemeet. Daar is egter geen rotasies gemeet nie en dit was dus steeds nodig om die rotasievryheidsgrade van die struktuur in terme van translasievryheidsgrade te skryf. Dit is gedoen deur van die sogenoemde Guyan-reduksie⁸ gebruik te maak.

Die berekende natuurlike frekwensies van die gereduseerde stelsel, nadat die Guyan-reduksie daarop toegepas is, word in figuur 3 met die eksperimentele resultate vergelyk deur die frekwensie-indeks $\sqrt{\lambda_j^e / \lambda_j^x} - 1$ as funksie van modusnommer j te stip. Hierdie indeks moet ideaal gelyk wees aan nul. Die modusvorms word in figuur 4 met mekaar vergelyk deur gebruik te maak van 'n modale korrelasiekriterium:⁹

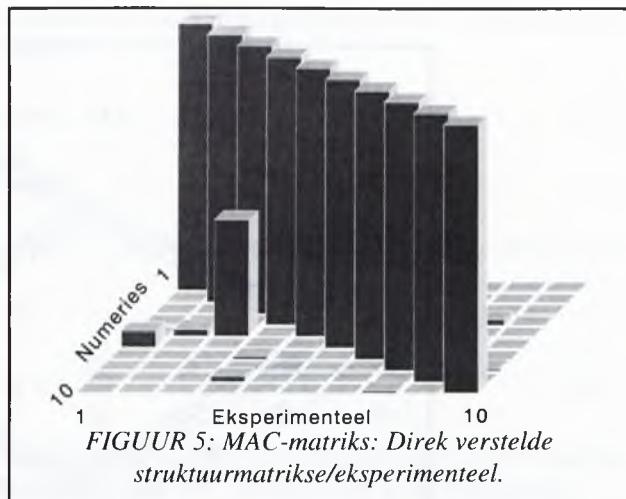
$$MAC(\phi_i^e \phi_j^x) = \frac{|\phi_i^{eT} \phi_j^x|^2}{(\phi_i^{eT} \phi_i^e)(\phi_j^{xT} \phi_j^x)} \quad (25)$$

waarmee numeriese modus i met eksperimentele modus j vergelyk word. 'n MAC naby 1 impliseer goed gekorreleerde modusse, terwyl 0 ongekorreleerde modusse aandui. Soos verwag kan word, is die waardes op die





FIGUUR 4: MAC-matriks: Guyan-reduksie/eksperimenteel.



FIGUUR 5: MAC-matriks: Direk verstelde struktuurmatrikse/eksperimenteel.

diagonaal van die MAC-matriks wat ooreenstemmende modusse aandui, in die algemeen nie presies gelyk aan 1 nie. (Modusse 2 en 5 korreleer nie goed wat vorm betref nie, al is dit uit figuur 3 duidelik dat daar goeie ooreenstemming van frekwensies vir dié modusse bestaan.) Albei metodes soos bespreek in paragrawe 2 en 3 is toegepas op die toetsstruktuur.

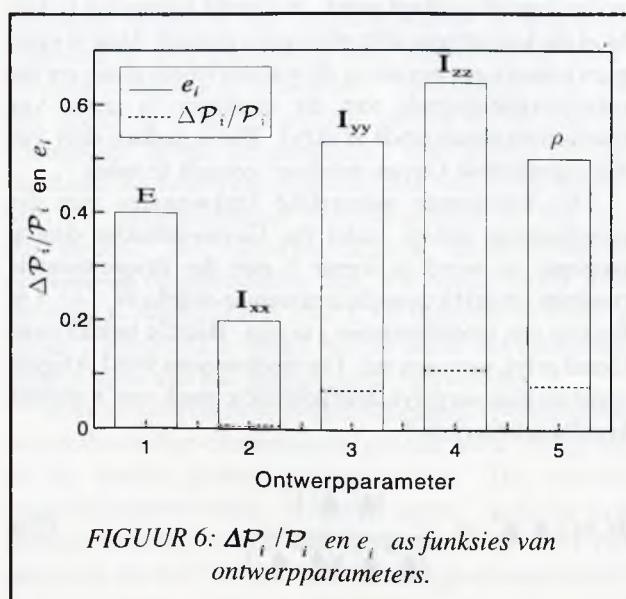
Uit tabel 1 is dit duidelik dat deur direkte verstelling van die struktuurmatrikse, dit moontlik is om die elastiese natuurlike frekwensies van die gewysigde stelsel presies gelyk aan die gemete frekwensies te forseer. Van die MAC-matriks (figuur 5) is dit duidelik dat die korrelasie tussen ooreenstemmende modusvorms inderdaad ook verbeter. 'n Baie belangrike newe-effek van die verstelling van die struktuurmatrikse is die feit dat die ses starmodus-frekvensies wat ideaal nul behoort te wees, nou egter wissel tussen 2,8 en 13,4 Hz. Hierdie frekwensies raak vergelykbaar met die van die elastiese modusse van die struktuur, en is 'n simptoom van veranderinge in die struktuurmatrikse wat nie meer fisiese sin maak nie en struktuurmofifikasies gebaseer op die model, baie riskant maak. In gevalle waar hierdie veranderinge relatief klein is, en waar 'n bepaalde substruktuur onveranderd gelaat word tydens 'n substruktuaranalise, kan hierdie tegniek

egter waarskynlik tog met vrug gebruik word, en behoort dit verder ondersoek te word.

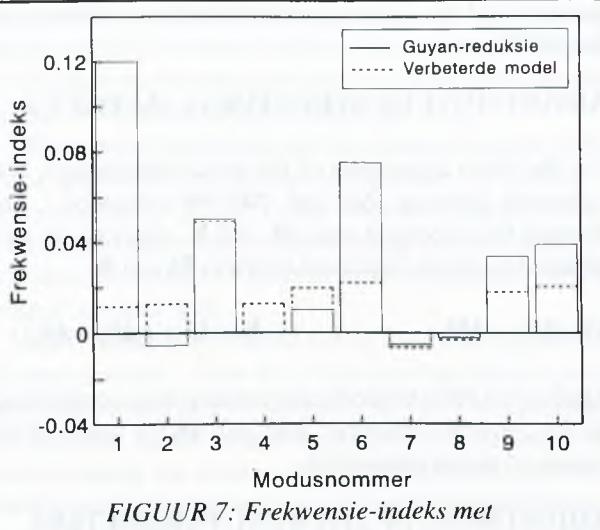
Na aanvanklike ondersoek waarin die effek van verskillende fisiese parameters ondersoek is, is besluit om vir implementering van die fisiese parametermetode die elastisiteitsmodulus E , die tweede momente van area I_{xx} , I_{yy} en I_{zz} asook die digtheid ρ as fisiese ontwerpparameters te gebruik. Vir die opstel van parsiele afgeleides in S word aanvanklik sowel die eiewaardes as die eievktore gebruik, terwyl daar tydens die optimering van die fisiese parameters slegs van die eiewarde-sensiwiteteite gebruik gemaak word. Figuur 6 toon $\Delta P_i / P_i$ en e_i vir die betrokke fisiese parameters.

Uit figuur 6 is dit duidelik dat alhoewel $\Delta P_i / P_i$ vir E van dieselfde orde is as die vir ander parameters, is e_i klein in vergelyking met die vir die ander parameters, en kan E waarskynlik ook weglaat word as ontwerpparameter. Dat dit inderdaad so is, word bevestig deur 'n vergelyking van figure 7 en 8 waarin die genormaliseerde natuurlike frekwensies vir vier en vyf ontwerpparameters onderskeidelik getoon word. In albei figure word die verbeterde modelle vergelyk met die oorspronlike Guyan-gereduseerde numeriese model (figuur 3). Alhoewel dit duidelik is dat vyf ontwerpparameters (figuur 8) effens beter resultate lewer as vier parameters (figuur 7), is die verbetering nie beduidend nie (kyk ook tabel 1). Figuur 9 toon die MAC-

TABEL 1 Natuurlike frekwensies					
Modus-nommer	Eksperimenteel	Numeries Guyan	Verstelling struktuurmatrikse	Verstelling fisiese parameters: 4 parameters	Verstelling fisiese parameters: 5 parameters
	[Hz]	[Hz]	[Hz]	[Hz]	[Hz]
1	21,72	24,31	21,72	21,97	21,83
2	31,78	31,60	31,78	32,14	31,97
3	40,06	41,96	40,06	41,87	41,76
4	46,53	46,54	46,53	47,13	47,06
5	61,17	61,73	61,17	62,53	62,32
6	66,27	71,30	66,27	67,85	67,67
7	112,36	111,97	112,38	111,75	111,32
8	120,30	120,06	120,30	119,94	119,48
9	151,32	156,57	151,32	154,39	153,57
10	177,87	184,67	177,87	181,62	180,58



FIGUUR 6: $\Delta P_i / P_i$ en e_i as funksies van ontwerpparameters.



FIGUUR 7: Frekvensie-indeks met vier ontwerpparameters.

TABEL 2 Fisiese parameters en waardes van ΔP

Fisiese parameter	Oorspronklike waarde	Optimale waarde: 4 parameters	Persentasie verskil: 4 parameters	Optimale waarde: 5 parameters	Persentasie verskil: 5 parameters
E	$2,068 \times 10^{11}$	$2,068 \times 10^{11}$	-	$2,075 \times 10^{11}$	0,35
I_{xx}	$7,232 \times 10^8$	$6,855 \times 10^8$	-5,21	$6,799 \times 10^8$	-5,98
I_{yy}	$3,398 \times 10^8$	$3,113 \times 10^8$	-8,39	$3,022 \times 10^8$	-11,08
I_z	$3,398 \times 10^8$	$3,108 \times 10^8$	-8,53	$3,009 \times 10^8$	-11,45
p	7830,0	7982,7	1,95	7981,3	1,93

matriks vir vyf ontwerpparameters. Vergelyking met figuur 4 duï aan dat, in teenstelling met die situasie wanneer die struktuurmatrikse direk verstel word (figuur 5), die modusvorms min verander het. Dit is natuurlik 'n gevolg van die feit dat daar in die opstel van ΔP slegs na sensitiwiteit ten opsigte van eiewaardes gekyk word. Alhoewel dit uiteraard reggestel kan word deur sensitiwiteit ten opsigte van eievektore ook in berekening te bring, is dit iets wat met omsigtigheid gedoen moet word as gevolg van die feit dat gemete eievektore normaalweg nie so betroubaar as die eiewaardes is nie.

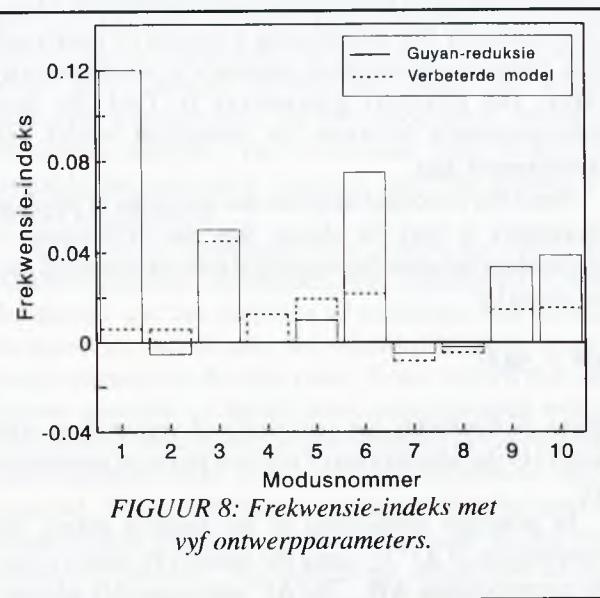
Tabel 2 toon aan dat I_{xx} , I_{yy} en I_z in die oorspronklike eindige-elementmodel oorskot is. Dit kan fisies verklaar word aan die hand van rondings op die hoeke van die werklike buise wat nie in die eindige-elementmodel in berekening gebring is nie. Die onderskatting van die digtheid in die oorspronklike model is te wyte aan sweisnate en klein afwykings by die laste tussen die werklike struktuur en die model.

Om seker te maak dat die berekende optimum ontwerpparameters eenduidig is, is elk van die fisiese parameters om die beurt met 10 persent geperturbeer. Die geperturbeerde parameters is dan as inset tot die optimeringsproses gebruik. Inelke geval is daar na dieselfde optimale parameters teruggekeer.

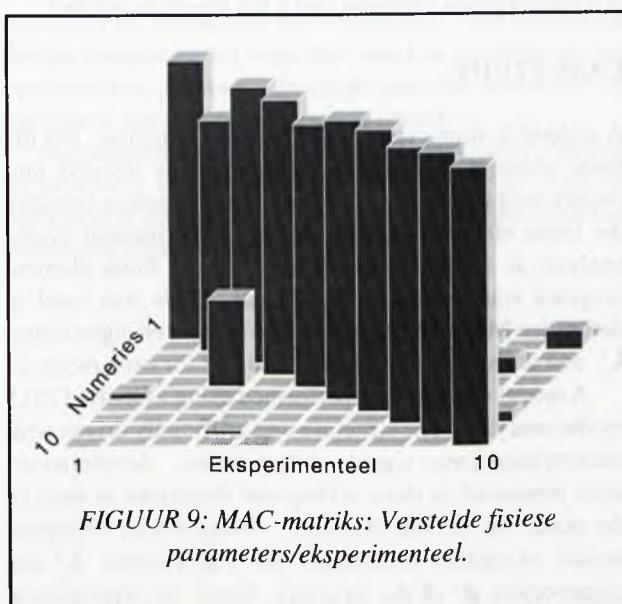
Implementering van die fisiese parametermetode is geweldig berekeningsintensief, en tipiese lopies op 'n 486 mikrorekenaar het aan die orde van twee uur geduur. Dit is veral as gevolg van die herhaalde oplossing van die numeriese eieprobleem. Vir die implementering in MATLAB 3.5 was dit nie moontlik om die yl karakter van die struktuurmatrikse uit te buit nie. Dit word wel in kommersiële eindige-elementpakkette gedoen. 'n Aspek wat egter verdere aandag benodig, is die optimeringsalgoritme wat vir die minimering van die konvergensiekriteria gebruik word. Dit is noodsaaklik om die aantal evaluasies van die Jacobiaan tot 'n absolute minimum te beperk.

GEVOLGTREKKING

Twee tegnieke vir die verbetering van numeriese modelle is ondersoek. Met die eerste word die struktuurmatrikse direk verstel. Hierdie metode is baie eenvoudig om te implementeer en lewer uitstekende korrelasie tussen die



FIGUUR 8: Frekvensie-indeks met vyf ontwerpparameters.



FIGUUR 9: MAC-matriks: Verstelde fisiese parameters/eksperimentele.

verbeterde numeriese model en die gemete resultate met minimale berekening. Dit is egter duidelik dat die fisiese samehang van die struktuurmatrikse versteur word, wat die tegniek ontoepaslik maak in gevalle waar die numeriese model as inset tot 'n struktuurmodifikasieproses gebruik moet word. 'n Moontlike uitsondering is situasies waar 'n bepaalde substruktuur onveranderd gelaat word tydens substrukturanalise. Dit behoort verder ondersoek te word.

Die tweede tegniek behels die verstelling van fisiese ontwerpparameters om die ooreenstemming tussen die berekende en die gemete eiewardes te verbeter. Ook in hierdie geval is daarin geslaag om beduidende verbetering in die ooreenstemming tussen die berekende en die gemete waardes te verkry deur middel van modellering-veranderinge wat fisiese sin maak. Die oplossing is uniek en daar word telkens na dieselfde optimale waardes gekonvergeer. Die proses is egter baie duur vanuit 'n berekeningsoogpunt en verdere werk is nodig om veral die optimeringsproses te versnel. Hierdie laaste tegniek hou egter die meeste potensiaal in vir verdere ontwikkeling en verdere werk moet veral gefokus word op die toepassing van die fisiese parametermetode in kommersiële eindige-elementpakkette.

SUMMARY

INTRODUCTION

The dynamic behaviour of structures may be studied through numerical computation or experimental modal analysis. The numerical approach (through finite element analysis) is particularly popular because of the relative ease with which the effect of design changes on the dynamic behaviour of a structure may be investigated, even before the structure exists. On the other hand it is generally accepted that experimental data, where available, are normally more reliable, especially as far as the natural frequencies of the structure are concerned. This leads to the need to use experimental data to improve numerical models for further analysis.

However, despite the tremendous practical potential of these methods, designers still rely greatly on intuitive methods to find a degree of correspondence between numerical and experimental behaviour. This is due to the many practical problems experienced in the application of the methods.

In this work the application of two specific methods are investigated. In the first the structural matrices (mass and stiffness) are directly adjusted. In the second it is attempted to find correspondence by adjustment of physical design parameters until the computed and experimental modal data are in agreement, rather than through direct manipulation of the structural matrices. The methods are briefly described and the application thereof on a continuum test structure modelled in terms of a finite element approach is discussed.

The application entails the execution of a finite element analysis, the reduction of the numerical data to be directly comparable to the experimental data, the imple-

mentation of the updating methods and an evaluation of the results.

ADJUSTMENT OF STRUCTURAL MATRICES

For the direct adjustment of the structural matrices, two correction matrices ΔM and ΔK are computed. The original finite element mass M' and K' matrices are then adjusted to obtain improved matrices M and K :

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^r + \Delta \mathbf{M} \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}^r + (\Delta \mathbf{K} + \Delta \mathbf{K}^T)$$

Application of the method simply entails direct computation of the correction matrices $\Delta\mathbf{M}$ and $\Delta\mathbf{K}$ in terms of the measured modal parameters.

ADJUSTMENT OF PHYSICAL PARAMETERS

Instead of direct adjustment of the structural matrices, an indirect approach may be followed through which specific physical parameters may be adjusted to improve the correlation between the numerical and experimental results. This is done by first constructing a sensitivity matrix and then using an optimization approach to simultaneously adjust the physical parameters to find the best correspondence between the numerical model and experimental data.

Since the structural matrices are functions of physical parameters it may be shown that the differences in eigenvalues between the numerical and experimental data are given by

$$\Delta W = S \Delta P$$

where S represents the sensitivity of eigenvalues with respect to the adjustments of selected physical parameters ΔP .

In principle application of the method entails the computation of ΔP by using the sensitivity matrix S and the corresponding ΔW . The ΔP are iteratively adjusted using optimisation principles and by calculating new ΔW and S -matrices, until $\| \Delta W^{(k)} \| - \| \Delta W^{(k-1)} \| \leq \epsilon$ where ϵ is a convergence criterion and k the iteration number.

CASE STUDY

A welded A-frame was chosen as a test structure. For the finite element analysis the structure was divided into twenty beam elements. To keep the interaction between the finite element analysis and the experimental modal analysis as simple as possible, a simple finite element program was written in MATLAB. This was used to determine \mathbf{M}^e and \mathbf{K}^e as well as the computed eigenvalues λ_j^e and corresponding eigenvectors ϕ_j^e for each mode j .

A modal test was then performed using a GenRad 2515 modal analyzer. The structure was artificially driven with uncorrelated force signals at two nodes. Accelerations were measured in three orthogonal directions at each of the nodes on the test structure. Using a poly-reference modal extraction technique, the eigenvalues λ_j^* and eigenvectors ϕ_j^* of the structure, based on experimental

data, were also determined. Because only translational degrees of freedom were measured, the rotational degrees of freedom were determined in terms of the translational degrees of freedom, using Guyan-reduction.

The natural frequencies of the reduced system were then compared to the measured frequencies by plotting a frequency index $\sqrt{\lambda_j^e/\lambda_j^m} - 1$ as a function of mode number j . The mode shapes were compared using a modal assurance criterion. As could be expected some of the mode shapes did not correlate well.

Both methods described above were then applied to the test structure. From this it became clear that through direct adjustment of the structural matrices, it was possible to force the elastic natural frequencies of the adjusted system exactly the same as the measured frequencies and that the correlation between the corresponding mode shapes certainly also improved. An important side-effect of the adjustment of the structural matrices was the fact that the six rigid body frequencies which should ideally be zero, became comparable to the elastic modes of the structure. This is a symptom of changes in the structural matrices which do not make physical sense and make structural modifications based on this model, very risky. In cases where these changes are relatively small, and where particular substructures are left unchanged during a structural analysis, this technique may however, probably be used with success, and this should be further investigated.

After initial investigation in which the effect of different physical parameters was considered it was decided to use the modulus of elasticity, the second moments of inertia and the material density as the design parameters for this case. It was shown that the second moments of inertia were overestimated whilst the material density was underestimated in the original finite element model and significant adjustments were required. These could be physically justified by careful consideration of the simplifications made during the modelling process. No significant adjustment of the modulus of elasticity was required.

To ensure that the computed design parameters were unique, each of the physical parameters were successively perturbed by 10 percent. The perturbed design parameter set was then used as an input to the optimisation process. In each case the same set of optimised parameter values was found.

Implementation of the physical parameter method is, however, computationally very intensive. This is particularly so because of the repeated solution of the numerical eigenproblems.

CONCLUSIONS

Two techniques for the improvement of numerical models are investigated. With the first the structural matrices are directly adjusted. This method is simple to implement and renders excellent correlation between the numerical model and the measured results with minimal computational effort. It is, however, clear that the physical consistency of the structural matrices is disturbed, which makes the technique unsuitable for cases where the numerical model is required as an input to a structural modification process. A possible exception may occur where particular substructures are left unchanged during the structural analysis. This should be further investigated.

The second technique entails the adjustment of physical design parameters to improve the correspondence between computed and measured eigenvalues. Significant improvement in the correspondence between the computed and measured values could be obtained through modelling changes which made physical sense. The solution is unique and consistently converges to the same values. The process is, however, very expensive from a computational point of view and further work is required, especially to expedite the optimisation. The latter technique, however, holds greater promise for development and further research be focused in particular on the application of the physical parameter method in commercial finite element packages.

LITERATUURVERWYSINGS

1. Imregun, M. & Visser, W.J. (1991). A review of model updating techniques, *The Shock and Vibration Digest*, 23(1), 9-20.
2. Grobler, D.Z. (1994). Verbetering van numeriese modelle met behulp van eksperimentele modale analise, *M.Ing.-Verhandeling, Universiteit van Pretoria, Pretoria*.
3. Berman, A. & Nagy, E.J. (1983). Improvement of a large analytical model using test data, *AIAA Journal*, 21(8), 1168-1173.
4. Zhang, Q., Lallement, G., Fillod, R. & Piranda, J. (1987). A complete procedure for the adjustment of a mathematical model from the identified complex modes, *Proceedings of the 5th International Modal Analysis Conference*, 1183-1190.
5. Wei, J.J.C., Chang, Q., Allemand, R.J. & Wei, M.L. (1989). Correction of finite element model via selected physical parameters, *Proceedings of the 7th International Modal Analysis Conference*, 1231-1238.
6. The Mathworks (1989). 386-MATLAB for 80386 personal computers.
7. Structural Dynamics Research Corporation (1985). Modal analysis user manual. Version 9.0.
8. Guyan, R.J. (1965). Reduction of mass and stiffness matrices, *AIAA Journal*, 3(2), 380.
9. Ewins, D.J. (1984). *Modal testing: Theory and practice* (Research Studies Press, Letchworth).