Navorsings- en oorsigartikels

Supersimmetriese kwantummeganika

H. Fiedeldey

Departement Fisika, Universiteit van Suid-Afrika, Posbus 392, Pretoria 0001

Ontvang 16 Augustus 1991; aanvaar 9 Oktober 1991

UITTREKSEL

'n Oorsig van die nierelativistiese supersimmetriese kwantummeganika word gegee. Suksesvolle toepassings in die geval van Pauli-verbode toestande wat voorkom in die semimikroskopiese Resonantegroep-model vir die verstrooiing van twee trosse word bespreek. Vervolgens word neutron-deuteron-verstrooiing in die eksakte teorie van Faddeev en die Efimov-effek bespreek. Ander interessante toepassings word ook kortliks vermeld.

ABSTRACT

Supersymmetric nonrelativistic quantum mechanics

This is a review of supersymmetric nonrelativistic quantum mechanics. Successful applications of the removal of Pauli-forbidden states occurring in the semi-microscopic Resonating Group Model for two-cluster scattering are discussed. The case of neutron-deuteron scattering in the context of the exact Faddeev theory and the Efimov effect are then discussed. Other interesting applications are also briefly mentioned.

INLEIDING

Witten¹ het aangetoon dat die algebra van supersimmetrie in deeltjiefisika gebruik kan word om die spektrale eienskappe van twee met mekaar geassosieerde Hamiltoniane, wat saamgevat is tot een enkele sisteem, te bestudeer. In deeltjiefisika is daar vir elke gewone fermion 'n supervennoot wat 'n boson is en omgekeerd. Hulle spins verskil met 'n halwe eenheid. Daar bestaan ook 'n superlading wat behoue bly en geassosieer is met supersimmetrie, en dit impliseer dat sekere relasies van toepassing is tussen die spektra van die twee lede wat 'n supersimmetriese paar vorm.² Supersimmetrie in deeltjiefisika kan lei tot groot vordering in die soektog na die beskrywing van die natuur in terme van 'n klein aantal eenvoudige wette.

Supersimmetrie kan ook toegepas word in die nierelativistiese kwantummeganika. Dit is reeds lank bekend dat die Schrödinger-vergelyking gefaktoriseer kan word as die produk van 'n paar lineêre differensiaaloperatore. Dat geskikte kombinasies van hierdie operatore die komponente is van die supersimmetriese Hamiltoniaan is egter 'n nuwe insig. In daardie geval bestaan daar 'n nou verband tussen supersimmetrie soos toegepas in nierelativistiese kwantummeganika en die inverse verstrooiingsformalismes van Gelfand en Levitan,³ en Marchenko.³ Supersimmetriese transformasies kan byvoorbeeld gebruik word om gebonde toestande toe te voeg tot of te verwyder van die spektrum van 'n referensiepotensiaal, sonder om die faseverskuiwing vir 'n bepaalde partiële golf te verander. Die referensiepotensiaal word natuurlik in die proses getransformeer.

In baie gevalle is dit gerieflik om die verstrooiing van twee saamgestelde kerne m.b.v. 'n lokale potensiaal te beskryf. Die lokale potensiale wat daarvoor gekonstrueer

word, laat egter dikwels gebonde toestande toe, wat in werklikheid deur die Pauli-beginsel verbode is. Supersimmetriese kwantummeganika kan dan gebruik word om 'n unieke lokalepotensiaal te konstrueer wat eksak dieselfde verstrooiingsamplitude en fisiese gebonde toestande het as die oorspronklike potensiaal, maar nie sy Pauli-verbode toestande (PVT) nie.

Baye⁴ het hiervan gebruik gemaak om die ekwivalensie van die diep lokale α - α -potensiaal van Buck *et al.*⁵ met die suiwer fenomenologiese draaimomentafhanklike (l -afhanklike) potensiaal van Ali en Bodmer,⁶ wat geen verbode toestande toelaat nie, te demonstreer. Die Buck-en-Friedrich-potensiaal het egter die eienskap dat dit net soos die mikroskopiese Resonantegroep-model (RGM)⁷ vir elke PVT 'n bydrae π tot die faseverskuiwing by energie $E = 0$ maak, indien al die faseverskuiwings $\delta_l(E)$ sodanig genormaliseer is dat $\delta_l(E) \xrightarrow{E \rightarrow 0} 0$. Die eksperimentele data is hiermee in goeie ooreenstemming in teenstelling met die waardes van $\delta_l(0)$ wat die Ali-Bodmer-potensiale, in ooreenstemming met Levinson se teorema, lewer. Die lokale l -afhanklike potensiale wat met behulp van die supersimmetriese transformasies (ST) gekonstrueer word, het egter afstotende $\frac{1}{r^2}$ singulariteite by die oorsprong en bevredig gevolglik 'n ander vorm van Levinson se teorema wat wel dieselfde $\delta_l(0)$ lewer as die potensiaal van Buck *et al.* Terselfdertyd het hulle egter geen PVT nie en is dus die lokale potensiaal wat die α - α -interaksie die beste daarstel.⁸

Daar het vir 'n lang tyd 'n groot meningsverskil tussen voorstanders van diep en vlak ekwivalente lokale potensiale bestaan. Supersimmetriese kwantummeganika het in beginsel die oplossing vir hierdie probleme gelewer, maar dit is nodig

om 'n stap verder te gaan, nl. om in ag te neem dat die diep lokale potensiale ook energie-afhanklik is.⁹ Omdat die RGM in werklikheid slegs 'n semimikroskopiese teorie is, is dit ook belangrik om die geval van die n-d-verstrooiing te ondersoek, waar ons van die eksakte mikroskopiese Faddeev-teorie gebruik kan maak.¹⁰

Daar is 'n wye gebied van toepassings van supersimmetriese kwantummekanika in kerne, byvoorbeeld n+ α -verstrooiing,¹¹ maar ook in ander gebiede van die fisika. Sukumar⁵ en Amado *et al.*¹² het aangetoon dat dit moontlik is om die grondtoestand van die Coulomb-potensiaal weg te transformeer, en sodoende 'n nuwe fase-ekwivalente potensiaal met analitiese oplossings te konstrueer. Selfs die Efimov-effek is met behulp van supersimmetrie ondersoek.¹³ Toepassings op die gebied van kwarke word tans ook ondersoek. Verder word genoem dat supersimmetriese transformasies ook op eendimensionele probleme en gekoppelde kanaalsisteme aangewend kan word.¹⁴

In hierdie kort oorsig word supersimmetriese kwantummekanika in drie dimensies eers geskets en daarna word enkele van die bogenoemde voorbeelde bespreek. Ten slotte word die vooruitsigte en toekoms moontlikhede van supersimmetriese kwantummekanika bespreek. Hier word egter nie ingegaan op die belangrikheid van supersimmetrie in deeltjiefisika nie, maar die bespreking word beperk tot niera-relatiewistiese kwantummekanika, hoewel toepassings op byvoorbeeld die spektra van die Dirac-vergelyking ook gemaak is.

DIE TEORIE VAN SUPERSIMMETRIESE KWANTUMMEGANIKA

Supersimmetriese kwantummekanika word kortliks vir die geval van die radiale Schrödinger-vergelyking en 'n lokale potensiaal $V_0(r)$ beskryf. Gestel $\hbar^2 = 2m = 1$ dan is

$$H_0 \equiv -\frac{d^2}{dr^2} + V_0(r), \quad (1)$$

waar $V_0(r)$ die kern-, Coulomb- en sentrifugale potensiale insluit. Die Hamiltoniaan H_0 en sy supersimmetriese vennoot H_1 kan geskryf word as

$$\begin{aligned} H_0 &= A_0^+ A_0^- + \epsilon_0, \\ H_1 &= A_0^- A_0^+ + \epsilon_0, \end{aligned} \quad (2)$$

waar

$$A_0^\pm = \pm \frac{d}{dr} + \frac{d}{dr} \ln \phi_0(\epsilon_0) = \pm \frac{d}{dr} + W_0(r). \quad (3)$$

Hier is $W_0(r)$ die sogenaamde superpotensiaal en

$$H_0 \phi_0(\epsilon_0) = \epsilon_0 \phi_0(\epsilon_0). \quad (4)$$

Die golffunksie $\phi_0(\epsilon_0)$ mag geen nulpunte hê nie, om singulariteite in die potensiaal te vermy en is dus die oplossing van die Schrödinger-vergelyking by die faktoriseringsenergie ϵ_0 , waar $\epsilon_0 \leq -B$ en B die energie is van die grondtoestand van H_0 . Die eiefunksies $\phi_1(E)$ van H_1 kan soos volg bepaal word.

$$\phi_1(E) = (E - \epsilon_0)^{-\frac{1}{2}} A_0^- \phi_0(E). \quad (5)$$

Indien $\epsilon_0 = -B$ gekies word, is die spektra van H_1 en H_0 identies, behalwe dat die grondtoestand $-B$ van H_0 ontbreek, omdat $A_0^- \phi_0(-B) = 0$ is, terwyl

$$H_1 = -\frac{d^2}{dr^2} + V_1(r), \quad (6)$$

waar

$$V_1(r) = V_0(r) - 2 \frac{d^2}{dr^2} \ln \phi_0(-B) \quad (7)$$

Indien die asimptotiese toestande van die S-matrikse S_0 van H_0 en S_1 van H_1 by die energie $E = k^2$ nou beskou word, kan aangetoon word dat $(B = K^2)$

$$S_1 = \frac{k - iK}{-k - iK} S_0. \quad (8)$$

Hieruit blyk duidelik dat die pool van S_0 as gevolg van die gebonde toestand by $k = iK$ in S_1 verwyder word. Dit is moontlik omdat die superpotensiaal $W_0(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} -K$.

Hoewel $H_1 \phi_1 = -B \phi_1$, is daar geen werklike gebonde toestand van H_1 by $E = -B$ nie. Ondanks die feit dat $\phi_1(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} r^{l+1}$, is dit 'n nienormaliseerbare funksie en $\phi_1(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{Kr}$. Nietemin is die prosedure wat gevolg is geldig en is $W_1(r)$ beperk. Wat belangrik is, is nie die eksponensiale groei van $\phi_1(r)$ vir groot r , wat in ieder geval in $W_1(r)$ uitkanselleer nie, maar die feit dat $\phi_1(r)$ geen nulpunte het nie omdat $-B$ onderkant die spektrum van gebonde toestande van H_1 lê.

Die supersimmetriese vennoot H_2 van H_1 kon nou ook gekonstrueer word deur te skryf

$$H_2 = A_1^- A_1^+ - B = H_1 - 2 \frac{dW_1}{dr} = H_0 - 2 \frac{dW_0}{dr} - 2 \frac{dW_1}{dr} \quad (9)$$

waar

$$H_2 \phi_2 = E \phi_2 \quad (10)$$

en

$$\phi_2(E) = \frac{-1}{B+E} A_1^- A_0^- \phi_0(E) \quad (11)$$

Dit is duidelik dat H_2 dieselfde spektrum het as H_1 , m.a.w. H_2 het geen gebonde toestand by $E = -B$ nie. Omdat $W_2(r)$ asimptoties na $+K$ neig, word vir S_2 gevind dat

$$S_2 = \frac{k + iK}{-k + iK} S_1 = S_0, \quad (12)$$

m.a.w. dat H_0 en H_2 ook nog fase-ekwivalente Hamiltoniane is. Hulle het dieselfde S-matriks en gevolglik dieselfde verstrooiingsfases $\delta_2(k)$ en $\delta_0(k)$, hoewel hulle potensiale $V_0(r)$ en $V_2(r)$ verskil en H_0 'n gebonde toestand by $E = -B$ het, wat by H_2 ontbreek.

Let egter op dat H_0 en H_1 nie fase-ekwivalent is nie. Van vgl. (7) kan afgelei word dat, by die oorsprong,

$$V_1(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} V_0(r) + \frac{2(l+1)}{r^2} \sim \frac{(l+1)(l+2)}{r^2} \quad (13)$$

omdat $V_0(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} \frac{l(l+1)}{r^2}$. Hier kom die interessante verskynsel voor dat $V_1(r)$ hom by die oorsprong gedra soos 'n niesingulêre

potensiaal met draaimomentum $l + 1$. Die potensiaal $V_2(r)$, van die fase-ekwivalente Hamiltoniaan H_2 , gedra hom soos

$$V_2(r) \sim V_0(r) + \frac{2(2l+3)}{r^2} \sim \frac{(l+2)(l+3)}{r^2} \quad (14)$$

by die oorsprong, m.a.w. soos 'n potensiaal met draaimomentum $l + 2$. Die potensiaal $V_2(r)$ is vlakker as $V_0(r)$ en het 'n afstotende singulariteit van die vorm $\frac{2(2l+3)}{r^2}$ by die oorsprong soos uit vgl. (13) blyk. Hoewel H_2 'n gebonde toestand minder as H_0 het, het hulle dieselfde faseverskuiwing $\delta_l(k)$, m.a.w. $\delta_l(0) - \delta_l(\infty)$ is ook dieselfde vir $V_2(r)$ en $V_0(r)$. Dit is egter bekend dat volgens Levinson se teorema¹⁵

$$\delta_l(0) - \delta_l(\infty) = n_b \pi, \quad (15)$$

waar n_b die aantal gebonde toestande is. Hierdie teenstrydigheid kan daardeur verklaar word dat hierdie konvensionele vorm van Levinson se teorema nie geld vir potensiale met 'n $\frac{1}{r^2}$ singulariteit nie.

Vir sisteme waarin n_p Pauli-verbode toestande, soos bespreek in die inleiding, wat geassosieer is met 'n eksperimenteel meetbare bydrae van $n_p \pi$ tot $\delta_l(0) - \delta_l(\infty)$, kan daardie n_p toestande deur herhaalde toepassing van die prosedure wat hierbo beskryf is, verwyder word, sonder om $\delta_l(E)$ te wysig. M.a.w. 'n ander vorm van Levinson se teorema geld dan,¹⁶

$$\delta_l(0) - \delta_l(\infty) = (n_b + n_p) \pi. \quad (16)$$

In die inleiding is reeds genoem dat die supersimmetriese transformasies in nou verband staan met die inverse verstrooiingsformalismes van Gelfand en Levitan, en Marchenko.³ Dat dit inderdaad die geval is blyk duidelik uit die verband tussen S_1 en S_0 , en S_2 en S_1 , wat deur vgl. (8) en (12) gegee word.

Die α - α -sisteem

In die inleiding is reeds, ter motivering van die gebruik van supersimmetriese transformasies in die kernfisika, verduidelik hoekom hierdie sisteem besonder interessant is.

Die eerste goeie aanpassing van alle lae-energie-verstrooiingsdata vir α - α -verstrooiing met behulp van 'n uiters eenvoudige potensiaal, onafhanklik van energie en draaimomentum, is deur Buck *et al.*⁵ verkry. Die aanpassing met die verstrooiingsdata is amper perfek tot by $E_{MM} = 16$ MeV in die massamiddelpuntsisteem. Bokant 16 MeV produseer die koppeling met ander kanale skerp resonansies, wat natuurlik nie in 'n eenkanaalbeeld gereproduseer kan word nie. Afgesien daarvan bly die aanpassing tot die faseverskuiwings goed tot by ongeveer 40 MeV. Hierdie α - α -potensiaal word gegee deur

$$V_{\alpha\alpha}(r) = -(122.6225 \text{ MeV}) \exp(-0.22r^2), \quad (16)$$

waar r in fermi gemeet word. Dit reproduseer ook die energie E_0 en die wydte Γ_0 van die grondtoestand van ^8Be wat amper gebonde is. Die eksperimentele waardes is $E_0 = 92.12$ keV, $\Gamma_0 = 6.8 \pm 1.70$ eV, terwyl die potensiaal $E_0 = 92.12$ keV en $\Gamma_0 = 5.8$ eV gee.⁸ As die eksperimentele faseverskuiwings $\delta_l(k)$ almal so grafies daargestel word dat hulle na nul neig

in die limiet van hoë energieë, m.a.w. $\delta_l(\infty) = 0$, dan is $\delta_l(0) = 2\pi$, $\delta_2(0) = \pi$ en $\delta_l(0) = 0$ vir $l \geq 4$, hoewel die α - α -sisteem geen gebonde toestand het nie. Dit is 'n oortuigende bewys van die voorkoms van PVT in die α - α -sisteem.

Die α - α -sisteem is uniek. 'n Dergelike volledige beskrywing van die eienskappe van die grondtoestand en die verstrooiingsdata met so 'n eenvoudige potensiaal is uiters seldsaam in die kernfisika en die α - α -potensiaal is waarskynlik, van alle potensiale wat op die sterk wisselwerking gegrond is, dié een wat die beste bepaal is. Dit hang natuurlik ten nouste saam met die feit dat α -deeltjies so sterk gebonde is.

Die PVT in die S- en P-golwe van die potensiaal van Buck *et al.* is deur Baye⁶ geëlimineer, volgens die prosedure wat lei van $V_0(r)$ tot die potensiaal $V_2(r)$ wat deur

$$V_2(r) = V_0(r) - 2 \frac{d^2}{dr^2} \ln [\phi_0(-B) \phi_1(-B)] \quad (17)$$

gegee word. Hier is $-B$ die energie van die laagste PVT in óf die S- óf die P-golwe. In die S-golf moet die prosedure weer eens herhaal word om die tweede PVT ook te elimineer. Die potensiale wat so verkry word is eksak fase-ekwivalent met $V_0(r)$ van vgl. (16), maar is singulêr en l -afhanklik. Baye het hierdie potensiale vergelyk met die suiwer fenomenologiese α - α -potensiale van Ali en Bodmer⁶ wat ook l -afhanklik is, geen PVT produseer nie en gevolglik faseverskuiwings $\delta_l(k)$ het met $\delta_l(0) = 0$ vir alle l -waardes. Dit blyk dat hulle baie goed met mekaar ooreenstem, hoewel die Ali-Bodmer-potensiale ietwat dieper minima het, as gevolg van hulle niesingulêre afstotende kerne.

Hoewel die supersimmetriese transformasies in hierdie geval goed werk, is daar tog nog 'n probleem. Die RGM produseer in die algemeen nielokale potensiale wat energie-afhanklike lokale ekwivalente potensiale het. Die supersimmetriese transformasies sal in hierdie geval nie tot die gewenste energie-onafhanklike potensiale lei nie. In die α - α -geval is dit nie 'n ernstige probleem nie, omdat die energieafhanklikheid van die diep ekwivalente lokale potensiaal met PVT baie swak is onderkant 40 MeV. In die meeste ander gevalle is dit egter nie so nie.

Die Resonantegroep-model en supersimmetrie

Een van die suksesvolste en gewildste (semi-)mikroskopiese teorieë om die interaksie tussen twee trosse van deeltjies te beskryf, is die RGM.⁷ Dit lei in die eenkanaalbenadering tot 'n integrodifferensiaalvergelyking vir die golffunksie $\chi(r)$ wat die relatiewe beweging van die twee trosse beskryf met behulp van

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + V_D(r) \right\} \chi(r) + \int dr' G_{\alpha\alpha}(r, r') \chi(r') = E \chi(r), \quad (18)$$

waar $V_D(r)$ die direkte dubbele voudingspotensiaal en $G_{\alpha\alpha}(r, r')$ die nielokale deel van die interaksie is, terwyl μ die gereduseerde massa is. Die nielokaliteit is 'n gevolg van die Pauli-beginsel vir fermione.

Die ekwivalente lokale potensiaal (ELP), $V_L(E, r)$ geassosieer met die nielokale RM-interaksie, bevredig die gewone Schrödinger-vergelyking

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + V_L(E, r) \right\} \chi_L(r) = E \chi_L(r), \quad (19)$$

waar $\chi(r) = F(r) \chi_L(r)$

en $F(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 1$, die sogenaamde Perey-faktor is. Horiuchi⁹ het die semiklassieke WKB- (Wentzel-Kramers-Brillouin-) metode gebruik om $F(r)$ en $V_l(r)$ te konstrueer. Die resultaat is

$$V_l(E, r) = E - \frac{\hbar^2}{2\mu} k^2(r) = V_D(r) + G_{ex}^w(r, k(r)), \quad (20)$$

waar $G_{ex}^w(r, k)$ die Wigner-transformasie van $G_{ex}(r, r')$ daarstel. Dit word gegee deur

$$G_{ex}^w(r, k) \equiv \int ds e^{iks} G_{ex}\left(r - \frac{s}{2}, r + \frac{s}{2}\right), \quad (21)$$

terwyl

$$\frac{\hbar^2}{2\mu} k^2(r) + V_D(r) + G_{ex}^w(r, k(r)) = E \quad (22)$$

gebruik word om $k(r)$ te bepaal. Dit is duidelik van vgl. (22) dat $k(r)$ energie-afhanklik moet wees en gevolglik ook $V_l(E, r)$.

Vir die verstrooiing van ligte ione $x + {}^4\text{He}$, $x + {}^{16}\text{O}$ en $x + {}^{40}\text{Ca}$, waar $x = n, d, t, {}^3\text{He}$ of α , het Horiuchi en medewerkers¹⁷ aangetoon dat $V_l(E, r)$ die faseverskuiwings van die RGM goed kan reproduseer. Die potensiale $V_l(E, r)$ is diep en verskil nie baie van die dubbele voudingspotensiale $V_D(r)$ nie. Die energieafhanklikheid is nie baie sterk nie, maar tog in die algemeen betekenisvol groter as vir α - α -verstrooiing. Die rede waarom $V_l(0, r)$ vir $E = 0$ diep is, is dat daar 'n Pauli-verbode gebied bestaan in die faseruimte van die relatiewe beweging van die twee kerne. Die nielokale RGM-interaksie produseer nie net fisiese gebonde toestande nie, maar ook sogenaamde "oortollige" toestande wat met die PVT ooreenstem soos reeds bespreek is. Die RGM lewer dus die regverdiging vir die gebruik van lokale potensiale met PVT. Die energieafhanklikheid van die ekwivalente lokale potensiale vir die nielokale RGM-interaksies, het 'n dilemma tot gevolg vir die toepassing van supersimmetriese transformasies ter vergelyking van energie-onafhanklike lokale potensiale wat geen PVT meer bevat nie.

Dit is nie moontlik om die gewenste resultaat te verkry deur die supersimmetriese transformasie op $V_l(E, r)$ toe te pas nie. Slegs in die spesiale geval van $V_{\alpha\alpha}(r)$ kan die energieafhanklikheid verwaarloos word.

Hierdie dilemma kan egter opgelos word deur die formalisme van Marchenko³ op die faseverskuiwings $\delta_l^{\text{RGM}}(E)$ toe te pas, waarby die PVT se bindingsenergie en die korresponderende π in $\delta_l(0)$ in ag geneem word.

Die Marchenko-vergelyking word vir elke l gegee deur

$$K_l(r, s) + F_l(r, s) + \int_0^\infty K_l(r, t) F_l(t, s) dt = 0, \quad (23)$$

waar die kern $F_l(r, s)$ van die integraalvergelyking gegee word in terme van die S-matriks deur

$$F_l(r, s) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} h_l^{(*)}(kr) [1 - S_l(k)] h_l^+(ks) dk \\ + \sum_{i=1}^{n_B = n_p} M_i h_l^+(k_i r) h_l^+(k_i s). \quad (24)$$

Die h_l^+ is die Riccati-Hankel-funksies, terwyl M_i die normalisasiekonstantes van die gebonde toestande is (die fisiese toestande en die PVT word ingesluit). Die lokale potensiaal $V_l(r)$ wat hierdie $\delta_l(k)$, met $k_l^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2}$ reproduseer, word gegee deur

$$V_l(r) = -2 \frac{d}{dr} K_l(r, r).$$

Hierdie eerste stap in die proses lewer reeds 'n l -afhanklike potensiaal, wat egter niesingulêr, of minstens minder singulêr, is as $\frac{1}{r^2}$ by die oorsprong.

In die volgende stap word die supersimmetriese transformasies waar nodig op hierdie potensiale $V_l(r)$ toegepas, naamlik wanneer daar PVT in daardie partiële golf in die RGM¹⁸ voorkom. Uiteindelik word so 'n l -afhanklike lokale potensiaal $V_l(r)$ met 'n $\frac{1}{r^2}$ singulariteit wat die eksakte $\delta_l^{\text{RGM}}(E)$ reproduseer, verkry ook vir $E = 0$. Die singulariteit tree natuurlik slegs op waar daar 'n PVT in die RGM was. 'n Toepassing van hierdie metode word uitvoerig in verw. (18) bespreek.

Faddeev-teorie en supersimmetrie

Die Faddeev-vergelyking¹⁹ maak dit moontlik om 'n eksakte oplossing te vind vir die driedeeleprobleem in terme van tweedeele- (en selfs driedeele-) kragte. Dit het geblyk dat die reële deel van ${}^4\delta_0(E)$, die faseverskuiwing vir S-golwe en elastiese verstrooiing in die kwartetkanaal, (totale spin $S = 3/2$) die eienskap het dat ${}^4\delta_0(0) = \pi$ (indien ${}^4\delta_0(\infty) = 0$), hoewel daar geen gebonde toestand in hierdie kanaal optree as gevolg van die Pauli-beginsel nie. Dit is geïnterpreteer in terme van 'n Pauli-verbode toestand (PVT) na analogie van die RGM in die voorgaande bespreking.

Hierdie argument is egter nie oortuigend nie omdat die begrip van 'n PVT slegs vir die RGM en soortgelyke metodes goed gedefinieer is, maar nie in ooreenstemming is met die Faddeev-teorie nie. In die Faddeev-teorie is daar nog geen werklike fisiese verklaring vir die feit dat ${}^4\delta_0(\pi) = 0$ nie. Ons kan egter meer lig werp op hierdie toestand deur terug te gaan na 'n ekwivalente tweedeelebeskrywing¹⁰ soos hierbo vir die RGM. Die faseverskuiwing ${}^4\delta_0(E)$ is m.b.v. die Faddeev-teorie eksak bereken vir n-d-verstrooiing in die kwartetkanaal. Daar word ${}^4\delta_0(E)$, tesame met 'n willekeurige fiktiewe bindingsenergie B , en bybehorende normalisasiekonstante gebruik om die Marchenko-teorie aan te wend soos in die geval van die RGM. Hierdie prosedure is nodig omdat die teorie van Marchenko slegs vir potensiale geformuleer is wat minder singulêr is as $\frac{1}{r^2}$. Vervolgens word hierdie gebonde toestand m.b.v. 'n supersimmetriese transformasie verwyder. Die potensiaal wat so bepaal word, blyk uniek te wees, m.a.w. onafhanklik van die gekose bindingsenergie en normalisasiekonstante, soos vir potensiale in die Levinson-tipe (m.a.w. minder singulêr as $\frac{1}{r^2}$) wat geen gebonde toestand het nie. 'n Interessante verskynsel is dat die unieke potensiaal wat so verkry is, suiwer afstotend is, hoewel die faseverskuiwing ${}^4\delta_0(E)$ die eienskap het dat ${}^4\delta_0(0) = \pi$. Aangesien hierdie afstotende potensiaal die faseverskuiwing van die Faddeev-teorie van drie deeltjies, prakties eksak reproduseer, is dit teoreties beter gemotiveer as die potensiale wat afgelei is m.b.v. die RGM. Hierdie potensiaal is dus in hierdie opsig beter gefundeer as die α - α -potensiaal van Buck *et al.* Verdere ondersoek t.o.v. n-d-verstrooiing in die dubletkanaal (totale spin $S = 1/2$) is nou aan die gang.

Verdere toepassings van supersimmetrie

Amado en medewerkers¹³ het ook die Efimov-effek vir driedeele-sisteme in die lig van supersimmetrie bespreek.

Efimov se effek behels die voorkoms van 'n logaritmes divergente aantal van driedeeltjiegebonde toestande in 'n sisteem van drie identiese bosons met paarsgewyse wisselwerkings, as elk 'n gebonde toestand met $B \rightarrow 0$ vir die tweedeeltjiesisteem, produseer. Dergelike tweedeeltjiepotsiaale het 'n baie groot verstrooiingslengte $a = -1/\sqrt{B}$ ($\hbar = 2m = 1$) en dit was algemeen aanvaar dat die Efimov-effek hierdeur veroorsaak word. Met behulp van 'n supersimmetriese transformasie kan hierdie gebonde toestand by energie $B \rightarrow 0$ verwyder word, terwyl die groot verstrooiingslengte a onveranderd bly. Die getransformeerde tweedeeltjiepotsiaal is egter grotendeels afstotend en het dus geen gebonde toestand nie. Amado *et al.*¹³ het aangetoon dat daar in hierdie geval ook nie 'n oneindige aantal driedeeltjietoestande voorkom nie. Die rede is dat die getransformeerde potsiaal in hierdie geval 'n patologiese gedrag het. Amado *et al.*¹⁴ het ook supersimmetriese kwantummekanika na gekoppelde kanaalsisteme uitgebrei en die verband tussen die S-matriks en daardie geval ondersoek. Verder is ook die verband tussen nukleon-nukleon- en nukleon-anti-nukleonpotensiale op hierdie wyse ondersoek.

Interessante toepassings is deur Sukumar⁵ vir die geval van die Coulomb- en harmoniese-ossillator-potensiale gemaak. Die grondtoestand is vir hierdie doel m.b.v. supersimmetriese transformasies verwyder en analitiese potensiale is sodoende verkry, met spektra wat ook in geslote vorm geskryf kan word.^{5,12}

Ten slotte moet vermeld word dat daar ook nog interessante toepassings in die atoomfisika is.³⁰

Bespreking en gevolgtrekkings

Supersimmetriese kwantummekanika het gedurende die laaste dekade groot opgang gemaak, nadat Witten die algebra van supersimmetrie in deeltjiefisika toegepas het en dit, in 'n poging om die natuurwette te vereenvoudig, gebruik het om die spektrale eienskappe van twee geassosieerde Hamiltoniane in een enkele sisteem saam te vat. Die eerste toepassing van nierelatiwistiese supersimmetriese kwantummekanika was vir eendimensionele sisteme, maar dit is spoedig gevolg deur drie- en selfs meerdimensionele toepassings in baie gebiede van die fisika waar lokale potensiale voorkom, en is nou selfs uitgebrei na nielokale interaksies tussen trosse van nukleone in die konteks van die Resonantegroep-model en die Faddeev-teorie vir driedeeltjieverstrooiing.

Ons groep ondersoek tans toepassings van supersimmetriese transformasies op

- (i) die spektra van kerne wat beskou kan word as bestaande uit α -deeltjies;
- ii) realistiese nukleon-nukleon-interaksies met inagneming van hulle kwarkstruktuur- en
- iii) mesone, barione en dibarione in terme van die kwarkpotensiaalmodel en daarmee geassosieerde probleme.

Die belangstelling wat daar wêreldwyd in supersimmetriese kwantummekanika bestaan, dui daarop dat ons in die toekoms nog baie interessante ontwikkelings in hierdie veld kan verwag.

DANKBETUIGING

Opregte dank is aan prof. J.H. van der Merwe verskuldig vir sy aanmoediging en die sorgvuldige lees van hierdie oorsig.

LITERATUURVERWYSINGS

1. Witten, E. (1981). Dynamical breaking of supersymmetry, *Nucl. Phys. B*, 188, 513 - 554.
2. Sukumar, C.V. (1985). Supersymmetric quantum mechanics of one-dimensional systems, *J. Phys. A*, 18, 2917 - 2936.
3. Chadan, K. & Sabatier, P.C. (1989). *Inverse problems in Quantum Scattering Theory*, 2nd ed., (Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo).
4. Baye, D. (1987). *Supersymmetry between deep and shallow nucleus-nucleus potentials*, *Phys. Rev. Lett.* 58, 2738.
5. Sukumar, C.V. (1985). Supersymmetric quantum mechanics and the inverse scattering method, *J. Phys. A*, 18, 2937 - 2955.
6. Ali, S. & Bodmer, A.R. (1966). Phenomenological alpha-alpha potentials, *Nucl. Phys.*, 80, 99 - 112.
7. Wildermuth, K. & Tang Y.C. (1977). *A unified theory of the nuclear* (Vieweg, Braunschweig).
8. Langanke, K. & Friedrich, H. (1986). In *Advances in nuclear physics*, vol. 17, Negele, J.W. & Vogt, E. eds. (Plenum Press, New York - London).
9. Horiuchi, H. (1980). A semiclassical treatment of non-local potentials, *Progr. Theor. Phys.*, 64, 184 - 203.
10. Sofianos, S.A., Papastylanos, A. & Fiedeldey, H. (1990). Role of Levinson's theorem in neutron-deuteron quartet S-wave scattering, *Phys. Rev. C*, 42, R506 - 509.
11. Amado, R.D., Cannata, F. & Dedonder, J.P. (1990). Supersymmetric quantum mechanics, the Pauli principle, and nucleon-alpha scattering, *Phys. Rev. C*, 41, 1289 - 1291.
12. Amado, R.D. (1988). Phase equivalent supersymmetric quantum-mechanical partners of the Coulomb potential, *Phys. Rev. A*, 37, 2277 - 2279.
13. Amado, R.D., Cannata, F. & Dedonder, J.P. (1991). Supersymmetric quantum mechanics, phase equivalence and low energy scattering anomalies (advance copy).
14. Amado, R.D., Cannata, F. & Dedonder, J.P. (1990). Supersymmetric quantum mechanics, coupled channels, scattering relations, *Int. J. Mod. Phys. A*, 3401 - 3415.
15. Newton, R.G. (1982). *Scattering theory of waves and particles*, 2nd ed. (Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin).
16. Swan, P. (1968). The exclusion principle and equivalent potentials for scattering of complex neutral particles, *Ann. Phys.*, 48, 455 - 492.
17. Aoki, K. & Horiuchi, H. (1983). Study of local internucleus potential on the basis of the resonating group method III, *Prog. Theor. Phys.*, 69, 857 - 881.
18. Fiedeldey, H., Sofianos, S.A., Papastylanos, A., Amos, K. & Allen L.J. (1990). Equivalence between deep energy-dependent and shallow angular-momentum dependent potentials, *Phys. Rev. C*, 42, 411 - 415.
19. Faddeev, L.D. (1963). The construction of the resolvent of the Schrödinger operator for a three-particle system and the scattering problem, *Soviet Phys., Doklady*, 7, 600 - 602.
20. Valance, A. & Bergeron, H. (1989). Model potentials on pseudopotentials the connection via supersymmetry, *J. Phys.*, 22, L65 - 69.