ISSN 0254-3486 = *S.A. Tydskrif vir Natuurwetenskap en Tegnologie* **9**, no. 2 1990

Navorsings- en oorsigartikels

Absoluut sommerende vermenigvuldigers en die Dvoretzky-Rogers-stelling

J. H. Fourie
Departement Wiskunde en Toegepaste Wiskunde, Potchefstroomse Universiteit vir Christelike Hoër Onderwys, Potchefstroom 2520

Ontvang 21 Februarie 1989; aanvaar 26 Februarie 1990

UITTREKSEL

Die ruimte $M(E)$ van absoluut sommerende vermenigvuldigers van 'n Banach-ruimte E word ondersoek. Voorbeelde van Banach-ruimtes E waarvoor $M(E)$ 'n ℓ^p-ruimte van absoluut p-sommeerbare skalaarrye is, word gegee. In hierdie ℓ^p-karakteriserings van $M(E)$ speel die bekende Dvoretzky-Rogers-stelling 'n belangrike rol. 'n "Alternatiewe" vorm van lg. belangrike stelling word ook bespreek.

ABSTRACT

Absolutely summing multipliers and the Dvoretzky-Rogers theorem

The space $M(E)$ of absolutely summing multipliers of a Banach space E is considered. For some special types of Banach spaces E it turns out that $M(E)$ can be characterized as an ℓ^p-space of absolutely summable scalar sequences. We provide some important examples of Banach spaces for which the ℓ^p-characterizations of $M(E)$ hold true. The well known Dvoretzky-Rogers theorem plays an important role in these characterizations. An "alternative" version of the last mentioned theorem is discussed.

1. INLEIDING

Die "absoluut sommeerbare" rye in Banach-ruimtes (d.i. rye (x_i) só dat $\Sigma_{i=1}^{\infty} \| x_i \| < \infty$) speel 'n belangrike rol in verskeie aspekte van die teorie van Banach-ruimtes. So bv. is dit 'n baie bekende feit dat 'n genormeerde lineêre ruimte E 'n Banach-ruimte is as en slegs as elke absoluut sommeerbare ry in E ook sommeerbaar in E is. As π enige permutasie van die natuurlike getalle is, dan is die reeks $\Sigma_{i=1}^{\infty} \| x_i \|$ konvergent as en slegs as $\Sigma_{i=1}^{\infty} \| x_{\pi(i)} \|$ konvergent is. In 'n Banach-ruimte E is $\Sigma_{i=1}^{\infty} \| x_{\pi(i)} \|$ dus konvergent vir elke absoluut konvergente reeks $\Sigma_{i=1}^{\infty} x_i$ in E en vir elke permutasie π van die natuurlike getalle – d.i. elke absoluut konvergente reeks in 'n Banach-ruimte is onvoorwaardelik konvergent.

Dit is natuurlik ook bekend dat 'n ry van skalare absoluut konvergent is as en slegs as dit onvoorwaardelik konvergent is. Hierdie feit, asook die feit dat koördinaatsgewyse konvergensie en normkonvergensie in eindig-dimensionele ruimtes saamval, lei tot die belangrike gevolgtrekking dat onvoorwaardelik konvergente reekse in eindig-dimensionele ruimtes ook absoluut konvergent is. In oneindig-dimensionele Banach-ruimtes is die situasie egter baie anders. Voorbeelde van onvoorwaardelik konvergente reekse in die belangrike (bekende) oneindig-dimensionele Banach-ruimtes wat nie absoluut konvergent is nie, het die vermoede laat ontstaan dat daar dalk in elke oneindig-dimensionele Banach-ruimte onvoorwaardelik konvergente reekse is wat nie absoluut konvergent is nie. In 1950 het A. Dvoretzky en C. A. Rogers[3] hierdie vermoede bevestig met die bewys van die volgende stelling:

STELLING (DVORETZKY-ROGERS). *As elke onvoorwaardelik konvergente reeks in 'n Banach-ruimte E absoluut konvergent is, dan is E eindig-dimensioneel. Meer spesifiek, as E 'n oneindig-dimensionele Banach ruimte is, dan bestaan daar vir elke ry $\underline{\alpha} \in \ell^2$ 'n onvoorwaardelik sommeerbare ry $\underline{x}$ in E só dat $|\alpha_i| = \|x_i\|$ vir alle i.*

'n Ry (x_i) in 'n Banach-ruimte E word swak absoluut sommeerbaar genoem as $\Sigma_{i=1}^{\infty} | \langle x_i, a\rangle | < \infty$ vir elke a in die kontinue duaal E' van E. Elke onvoorwaardelik konvergente reeks is ook swak absoluut konvergent. Die omgekeerde van hierdie bewering is in die algemeen nie geldig nie, maar dit is egter tog waar vir 'n groot klas van Banach-ruimtes. Die volgende belangrike stelling volg uit resultate van Bessaga en Pelczynski[1] – 'n bewys daarvan kan ook in Diestel[2] (bl. 45) gevind word.

STELLING (BESSAGA-PELCZYNSKI[1]). *Laat E 'n Banach-ruimte wees. 'n Nodige en voldoende voorwaarde vir elke swak absoluut konvergente reeks in E om onvoorwaardelik konvergent te wees, is dat E geen deel-*

ruimte moet hê wat topologies isomorf aan die ruimte c_0 van skalaar-nulrye is nie.

Laat E 'n Banach-ruimte wees en laat $S(E)$ die vektorruimte (t.o.v. koördinaatbewerkings) van alle rye in E wees. Ons beskou die volgende lineêre deelruimtes van $S(E)$:

(1) $\ell\{E\} := \{\underline{x} := (x_i) \in S(E)$: $\underline{x}$ absoluut sommeerbaar is$\}$

Dit is 'n Banach-ruimte met die norm:

$\| \underline{x} \|_a := \sum_{i=1}^{\infty} \| x_i \|$

(2) $\ell^p\{E\} := \{\underline{x} \in S(E): \sum_{i=1}^{\infty} \| x_i \|^p < \infty\}$,

$1 \leq p < \infty$

Dit is 'n Banach-ruimte met die norm:

$\| \underline{x} \|_{a,p} := (\sum_{i=1}^{\infty} \| x_i \|^p)^{\frac{1}{p}}$.

(3) $\ell(E) := \{\underline{x} \in S(E)$: $\underline{x}$ swak absoluut sommeerbaar is$\}$

Dit is 'n Banach-ruimte m.b.t. die norm:

$\| \underline{x} \|_s := \sup\{\sum_{i=1}^{\infty} | \langle x_i, a\rangle | : \| a \| \leq 1\}$.

(4) $\ell^p(E) := \{\underline{x} \in S(E)$:

$\sum_{i=1}^{\infty} | \langle x_i, a\rangle |^p < \infty \forall a \in E' \}$,

$1 \leq p < \infty$

Dit is 'n Banach-ruimte met die norm:

$$\| \underline{x} \|_{s,p} := \sup\{(\sum_{i=1}^{\infty} | \langle x_i, a\rangle |^p)^{\frac{1}{p}} : \| a \| \leq 1\}.$$

Dit blyk duidelik uit die definisies dat $\ell\{E\}$ 'n lineêre deelruimte van $\ell(E)$ is en dat die topologie wat deur die norm $\|.\|_s$ op $\ell\{E\}$ geïnduseer word swakker is as die normtopologie van $\ell\{E\}$. Uit die Dvoretzky-Rogers-stelling en die opmerkings hierbo volg dat $\ell\{E\} = \ell(E)$ (algebraïes) as en slegs as E eindig-dimensioneel is.

DEFINISIE (ABSOLUUT p-SOMMERENDE OPERATORE). 'n Operator $T : E \rightarrow F$ *word absoluut p-sommerend genoem as* $(Tx_i) \in \ell^p\{F\}$ *vir alle* $\underline{x} \in \ell^p(E)$. *As* $p = 1$, *noem ons die operator absoluut sommerend.*

Dit is duidelik dat die identiteitsafbeelding op 'n Banach-ruimte absoluut sommerend is as en slegs as E eindig-dimensioneel is.

2. ABSOLUUT SOMMERENDE VERMENIGVULDIGERS

2.1 DEFINISIE. *Laat* $M(E)$ *die versameling van alle skalaarrye* $\underline{\alpha}$ *wees sodanig dat* $(\alpha_i x_i) \in \ell\{E\}$ *vir alle* $\underline{x} \in \ell(E)$. *Ons noem die elemente van* $M(E)$ *die absoluut sommerende vermenigvuldigers van* E.

$M(E)$ is 'n volledige genormeerde ruimte oor die skalareliggaam van E, met norm $\| \underline{\alpha} \|_{M,E}$ $:= \sup\{\|(\alpha_i x_i)\|_a : \|\underline{x}\|_s \leq 1\}$.

Laat Λ^α die Köthe-duaal (ook genoem die α-duaal) van 'n skalaar ryruimte Λ aandui, d.i. Λ^α is die versameling van alle (komplekse) skalaarrye $\underline{\mu}$ só dat $\Sigma_{i=1}^{\infty} | \mu_i\beta_i | < \infty$ vir elke keuse van $\underline{\beta} \in \Lambda$.

As $\underline{\mu} \in M(E)^{\alpha\alpha}$ en $\underline{x} \in \ell(E)$, dan volg $\Sigma_{i=1}^{\infty} |\mu_i|\|x_i\| < \infty$ uit die feit dat $(\|x_i\|) \in M(E)^\alpha$. Dit geld vir alle $\underline{x} \in \ell(E)$, sodat $\underline{\mu} \in M(E)$. Dus lei ons af dat $M(E) = M(E)^{\alpha\alpha}$, d.i. $M(E)$ is 'n sg. *perfekte ryruimte*. Omdat die ruimte ℓ^1 van alle absoluut sommeerbare skalaarrye simmetries is, d.i. $(\alpha_{\pi(i)}) \in \ell^1$ as en slegs as $(\alpha_i) \in \ell^1$ vir elke permutasie π van die natuurlike getalle, volg dat die ruimtes $\ell(E)$ en $\ell\{E\}$ simmetries is. Gevolglik is $M(E)$ ook 'n simmetriese ryruimte. Dit blyk verder dat die projeksies $P_i(\underline{\alpha}) = \alpha_i$ van $M(E)$ op die skalaarliggaam K van E kontinu is, want: $|\alpha_i| = |\alpha_i|\|x\| \leq \|\underline{\alpha}\|_{M,E}$ vir elke $x \in E$ met $\|x\| = 1$ (let op dat $\|(0,0,..., 0,x,0,...)\|_s = 1$ in hierdie geval). Dus is $M(E)$ 'n sg. *BK-ruimte*.

Gestel E is 'n eindig-dimensionele Banach-ruimte. Uit die opmerkings van die vorige paragraaf blyk dit duidelik dat $M(E)$ die ruimte ℓ^∞ van begrensde skalaarrye is. As E egter oneindig-dimensioneel is, lei ons vervolgens af dat $M(E)$ 'n deelruimte van die ruimte ℓ^2 van kwadraties absoluut sommeerbare skalaarrye is.

2.2 STELLING. *Laat E 'n oneindig-dimensionele Banach-ruimte wees. Die volgende vektordeelruimte-insluitings is geldig:* $\ell^1 \subset M(E) \subset \ell^2$.

BEWYS: ℓ^1 is duidelik 'n vektordeelruimte van $M(E)$. Laat $\underline{\alpha} \in M(E)$ en gestel dat $\underline{\beta} \in \ell^2$. Volgens die Dvoretzky-Rogers-stelling bestaan $\underline{x} \in \ell(E)$ só dat $|\beta_i| = \|x_i\|$ vir alle i. Dit is duidelik dat $(\alpha_i x_i) \in \ell\{E\}$, sodat $\Sigma_{i=1}^{\infty} |\alpha_i\beta_i| < \infty$ volg. Die keuse van $\underline{\beta} \in l^2$ was willekeurig, sodat $\alpha \in (l^2)^\alpha = \ell^2$. ■

Die genoemde eienskappe van $M(E)$ laat onwillekeurig die volgende vraag ontstaan: "Is $M(E)$ (of wanneer is $M(E)$) isomorf aan 'n ℓ^p-ruimte (d.i. 'n ruimte van p-absoluut sommeerbare skalaarrye)?" Ons verskaf hieronder 'n bewys dat dit waar is vir die geval as $E = \ell^p$, met $1 \leq p \leq 2$. Die bewys berus op die volgende bekende resultate (van Grothendieck en Lindenstrauss & Pelczynski, onderskeidelik) uit die teorie van begrensde lineêre operatore:

2.3 STELLING (JARCHOW[4], P.427). *Die ruimte* $\ell(E)$ *is isometries isomorf aan die Banach-ruimte* $L(c_0, E)$ *van begrensde lineêre operatore met die operatornorm. Die isometrie word gedefinieer deur* $\underline{x} \rightarrow T_{\underline{x}}$, *met* $T_{\underline{x}}(\alpha) = \Sigma_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$. *In die besonder volg dit duidelik hieruit dat:*

$$\|\underline{x}\|_s = \|T_{\underline{x}}\| = \sup\{\| \sum_{i=1}^{\infty} r_i x_i\| : \underline{r} \in c_0, \sup |r_i| \leq 1\}.$$

2.4 STELLING (LINDENSTRAUSS & PELCZYNSKI[5]). *Laat* $1 \leq p \leq 2$.

$$L(c_0, \ell^p) = \pi_2(c_0, \ell^p)$$

$$:= \{T \in L(c_0, \ell^p): \sum_{i=1}^{\infty} \|Tx_i\|^2 < \infty \text{ vir alle } \underline{x} \in \ell^2(c_0)\}$$

en

$$\pi_2(T) \leq K_G\|T\| \text{ vir alle } T \in L(c_0, \ell^p),$$

waarby π_2 *die norm op die ruimte van absoluut 2-sommerende operatore en* K_G *die universele Grothendieck-konstante aandui.*

2.5 STELLING. *Laat* $1 \leq p \leq 2$. $M(\ell^p) = \ell^2$; *trouens hierdie ruimtes is ook topologies isomorf.*

BEWYS: Laat e_i die ry $\underline{\mu}$ met $\mu_j = 0$ as $j \neq i$ en $\mu_i = 1$ wees. Dit blyk duidelik uit (2.3) en (2.4) dat $T_{\underline{x}} \in \pi_2(c_0, \ell^p)$ vir elke $\underline{x} \in \ell(\ell^p)$. M.a.w. vir elke sodanige $\underline{x}$ kan ons aflei dat:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|T_{\underline{x}}(e_i)\|^2$$

$$\leq \pi_2(T_{\underline{x}})^2 \sup\{\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x_i, a\rangle|^2 : \|a\| \leq 1\}$$

$$\leq (K_G)^2(\sup \|x_i\|)(\|\underline{x}\|_s)^3$$

$$< \infty.$$

Dus $\underline{x} \in \ell^2\{\ell^p\}$ en $\|\cdot\|_{a,2} \leq K_G \|\cdot\|_s$ op $\ell(\ell^p)$. Dit is ook in die besonder duidelik dat $\Sigma_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|\|x_i\| < \infty$ vir elke keuse van $\underline{x} \in \ell(\ell^p)$ en $\underline{\alpha} \in \ell^2$, d.i. dat $\ell^2 \subset M(\ell^p)$. Die omgekeerde insluiting is ook waar volgens (2.2). Aangesien beide die ruimtes ℓ^2 en $M(\ell^p)$ BK-ruimtes is, volg uit 'n bekende resultaat van Zeller[7] vir FK-ruimtes (nl. dat 'n ryruimte hoogstens een FK-topologie kan hê) dat hulle ook topologies isomorf moet wees. ■

Deur ontleding van die bewys van (2.5) is dit duidelik dat die verband $\ell(\ell^p) \subset \ell^2\{\ell^p\}$ vir $1 \leq p \leq 2$ baie belangrik is vir die bewys van $M(\ell^p) = \ell^2$. Alhoewel ons bewys van (2.5) sterk steun op resultate uit die operatorteorie en meer in die besonder op die karakterisering van begrensde lineêre operatore van c_0 na ℓ^p, het ons later ontdek dat hierdie stelling maklik uitgebrei kan word d.m.v. bestaande resultate in die literatuur. Dit is nl. so dat die insluiting $\ell(\ell^p) \subset \ell^2\{\ell^p\}$ hierbo 'n spesiale geval van die sg. "Orlicz-eienskap" is (sien bv. Diestel,[2] bl. 188):

2.6 DEFINISIE. *'n Banach-ruimte E het die Orlicz-eienskap as*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^2 < \infty$$

vir elke onvoorwaardelik konvergente reeks $\Sigma_{i=1}^{\infty} x_i$ *in E.*

2.7 STELLING. *Laat E 'n oneindig-dimensionele Banach-ruimte wees. As E die Orlicz-eienskap het (in welke geval dit nie 'n deelruimte isomorf aan* c_0 *het nie), dan is* $M(E)$ *topologies isomorf aan* ℓ^2.

BEWYS: Elke $\underline{x} \in \ell(E)$ is onvoorwaardelik sommeerbaar volgens die Bessaga-Pelczynski-stelling van paragraaf 1. M.a.w. volgens ons aanname is $\ell(E) \subset \ell^2\{E\}$, met die gevolg dat $\Sigma_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|\|x_i\| < \infty$ vir alle $\underline{x} \in \ell(E)$ en $\underline{\alpha} \in \ell^2$. Dus $\ell^2 \subset M(E)$. Uit (2.2) volg dat $M(E) = \ell^2$; omdat beide hierdie ruimtes BK-ruimtes is, is hulle ook topologies isomorf. ■

2.8 DEFINISIE. *'n Banach-ruimte E word van kotipe 2 genoem as daar 'n konstante* $M < \infty$ *bestaan só dat:*

$$\int_0^1 \|\sum_{i=1}^{n} r_i(t)x_i\|dt \geq M^{-1}(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2)^{\frac{1}{2}},$$

vir elke eindige versameling $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ *in E.*

Hier is (r_i) *die ry van Rademacher-funksies, d.i.*

$$r_1 = 1$$

$$r_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{as } t \in [0,\frac{1}{2}) \\ -1 & \text{as } t \in [\frac{1}{2}, 1]; \end{cases}$$

$$r_3(t) = \begin{cases} 1 & \text{as } t \in [0,\frac{1}{4}) \text{ en as } t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \\ -1 & \text{as } t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \text{ en as } t \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

ensovoorts.

OPMERKINGS

(1) Banach-ruimtes van kotipe 2 het die Orlicz-eienskap. Volgens 'n bekende resultaat van B. Maury (Diestel,[2] bl. 188) het 'n Banach-rooster kotipe 2 as en slegs as dit die Orlicz-eienskap het — dit is egter nie bekend of elke Banach-ruimte met die Orlicz-eienskap van kotipe 2 is nie. Daar bestaan baie voorbeelde van Banach-ruimtes van kotipe 2, waarvan enkele bekendes die ruimtes $L_p(\mu)$ vir $1 \leq p \leq 2$ (Lindenstrauss en Tzafriri,[6] bl. 73), die Hilbertruimtes, die duaal J' van die James-ruimte, die duaal van enige C^*-algebra en die Schatten von Neumann-klasse C_p vir $1 \leq p \leq 2$ is (sien Diestel[2] en Jarchow[4] vir die definisies van hierdie ruimtes).

(2) In stelling 2.7 impliseer ons aannames dat E nie 'n kopie van c_0 insluit nie. Vervolgens karakteriseer ons $M(E)$ vir ruimtes wat wel deelruimtes isomorf aan c_0 het: Dit is duidelik dat $\Sigma_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| = \Sigma_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|\|e_i\| < \infty$ *vir elke* $\underline{\alpha} \in M(c_0)$, omdat $(e_i) \in \ell^1(c_0)$. Dus $M(c_0) = \ell^1$. Dit is ook maklik om na te gaan dat $M(F) \subset M(E)$ as E isomorf aan 'n deelruimte van F is. Gevolglik is $M(E) = \ell^1$ vir alle E wat 'n kopie van c_0 insluit.

(3) Laat $1 \leq q < 2$. Dit blyk uit die bewyse van (2.5) en (2.7) dat $M(E) = \ell^q$ sou geld vir alle oneindig-dimensionele Banach-ruimtes E wat die volgende eise bevredig:

(i) Vir elke $\underline{\alpha} \in \ell^p$ (met $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) bestaan daar 'n $\underline{x} \in \ell(E)$ só dat $\|x_i\| = |\alpha_i|$ vir alle i; en

(ii) $\ell(E) \subset \ell^p\{E\}$.

Die eienskap (ii) word bv. bevredig deur Banach-ruimtes van kotipe p (met $p \geq 2$). Eienskap (i) word bv. bevredig deur $E = \ell^p$, wat ook 'n Banach-ruimte van kotipe p is. Ons kan dus stelling 2.5 uitbrei tot:

2.9 STELLING. *$M(\ell^p)$ is topologies isomorf aan ℓ^q vir $2 \le p < \infty$ en $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

Die eienskap (ii) in opmerking 3 hierbo is egter nie moontlik vir $p < 2$ nie, want as dit waar was dan sou $\Sigma_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| \|x_i\| < \infty$ vir alle $\alpha \in \ell^q$ en $\underline{x} \in \ell(E)$, sodat $\ell^q \subset M(E) \subset \ell^2$ sou volg! As E nie 'n kopie van c_0 insluit nie, dan is hierdie 'n bewys dat daar vir elke $1 \le p < 2$ 'n onvoorwaardelik sommeerbare ry in E *bestaan wat nie absoluut* p-sommeerbaar is nie.

3. 'N "ALTERNATIEWE" VORM VAN DIE DVORETZKY-ROGERS-STELLING

In die poging om $M(E)$ as 'n ℓ^p-ruimte vir meer algemene Banach-ruimtes E te karakteriseer, kom die volgende vrae na vore:

(1) Bestaan daar oneindig-dimensionele Banach-ruimtes E sodanig dat die geslote eenheidsbol van $\ell\{E\}$ dig is in die geslote eenheidsbol van $\ell(E)$?

(2) Bestaan daar oneindig-dimensionele Banach-ruimtes $(X, \|\cdot\|_1)$ en $(Y, \|\cdot\|_2)$ só dat X 'n egte deelruimte van Y is en $\|x\|_2 \le \|x\|_1$ vir alle $x \in X$, terwyl die geslote eenheidsbol van X tog $\|\cdot\|_2$-dig in die geslote eenheidsbol van Y is?

Vervolgens bewys ons dat die antwoord op die eerste vraag beslis negatief is en gee daarmee 'n nie-triviale voorbeeld van ruimtes $Y = \ell(E)$ en $X = \ell\{E\}$ só dat die eienskappe in die tweede vraag bevredig word, terwyl die geslote eenheidsbol van X nie dig in die geslote eenheidsbol van Y kan wees nie. Die volledige antwoord op die tweede vraag is egter vir ons onbekend.

3.1 LEMMA. *Laat E 'n Banach-ruimte wees, sodanig dat die geslote eenheidsbol van $\ell\{E\}$ dig is in die geslote eenheidsbol van $\ell(E)$. Dan definieer die verband $\langle \underline{x}, \underline{\alpha} \rangle := \Sigma_{i=1}^{\infty} \langle x_i, \alpha_i \rangle$ 'n begrensde lineêre funksionaal op $\ell(E)$ met norm ≤ 1 vir elke ry $\underline{\alpha}$ in die geslote eenheidsbol van E'.*

BEWYS: Laat $\underline{x} \in \ell(E)$ met $\|\underline{x}\|_a \le 1$. Gestel $\underline{x}_n \to \underline{x}$ in die topologie van $\ell(E)$, met $\|\underline{x}_n\|_a \le 1$ vir alle n en met $\underline{x}_n = (x_{ni})_i$. Dan volg vir elke $k = 1,2 \ldots$ dat

$$\sum_{i=1}^{k} |\langle x_i, \alpha_i \rangle| = \lim_n \sum_{i=1}^{k} |\langle x_{ni}, \alpha_i \rangle| \le \sup_n \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|x_{ni}\| \right) \le 1$$

Dus is $\underline{\alpha} \in \ell(E)'$ met norm ≤ 1. ■

3.2 STELLING. *As E die voorwaardes van lemma (3.1) bevredig, dan is $\ell\{E\} = \ell(E)$.*

BEWYS: Die voorwaardes waaraan E voldoen verseker dat $\ell\{E\}$ dig is in $\ell(E)$. Gestel $\underline{x} \in \ell\{E\}$ só dat $\|\underline{x}\|_a \le 1$ en dat $\underline{x}_n \to \underline{x}$ in die topologie van $\ell(E)$, waar $\|\underline{x}_n\|_a \le 1$. Vir $\delta > 0$ bestaan daar $a_n \in E'$ met $\|a_n\| \le 1$ en $\|x_n\| < |\langle x_n, a_n \rangle| + \frac{\delta}{2^n}$. Uit (3.1) volg dat $(b_i) := ((\operatorname{sgn} \langle x_i, \alpha_i \rangle) a_i) \in \ell(E)'$. Dit lei tot

$$\|\underline{x}\|_a < \sum_{i=1}^{r} |\langle x_i, \alpha_i \rangle| + \delta$$

$$\le \sup_n \left(\sum_{i=1}^{r} \|x_{ni}\| \, \|b_i\| \right) + \delta \le 1 + \delta.$$

Omdat $\delta > 0$ willekeurig gekies was, lei ons af dat $\|\underline{x}\|_a \le 1$. Die topologieë van $\ell\{E\}$ en $\ell(E)$ is gevolglik ekwivalent op $\ell\{E\}$. Maar lg. ruimte is dig in $\ell(E)$, sodat die ruimtes moet saamval. ■

Dit blyk nou duidelik dat (3.2) tesame met die Dvoretzky-Rogers-stelling ons vraag 1 hierbo negatief beantwoord. Ons het nl. die volgende variasie op die Dvoretzky-Rogers-stelling:

3.3 GEVOLGTREKKING. *Laat E 'n Banach-ruimte wees. As die geslote eenheidsbol van $\ell\{E\}$ dig is in die geslote eenheidsbol van $\ell(E)$ dan is E 'n eindig-dimensionele ruimte.*

LITERATUURVERWYSINGS

(1) Bessaga, C. & Pelczynski, A. (1958). On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces. *Studia math.*, **17**, 151-164.

(2) Diestel, J. (1984). *Sequences and Series in Banach spaces. Grad. Text in Math.*, 92 (Springer Verlag).

(3) Dvoretzky, A. & Rogers, C.A. (1950). Absolute and unconditional convergence in normed spaces. *Proc. Nat. Acad.Sci. USA*, **36**, 192-197.

(4) Jarchow, H. (1981). *Locally Convex Spaces* (B.G. Teubner, Stuttgart).

(5) Lindenstrauss, J. & Pelczynski, A. (1968). Absolutely summing operators in L_p-spaces and their applications. *Stud. Math.* T.XXIX.

(6) Lindenstrauss, J. & Tzafriri, L. (1979). *Classical Banach spaces II. Function spaces. Ergeb. der Math und ihrer Grenzgebiete* 97 (Springer Verlag).

(7) Zeller, K. (1951). Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren. *Math. Z.*, **53**, 463-487.