Bornologiese pseudotopologiese vektorruimtes

M. A. Muller
Departement Wiskunde, Universiteit van Stellenbosch, Stellenbosch 7600

Ontvang 10 April 1989; aanvaar 4 Desember 1989

UITTREKSEL

Bornologiese ruimtes is deur Hogbe-Nlend[5] gedefinieer en pseudotopologiese ruimtes deur Fischer[3]. In hierdie artikel word eienskappe van bornologiese pseudotopologiese vektorruimtes ondersoek. 'n Karakterisering van sulke ruimtes word verkry en daar word aangetoon dat kwosiëntruimtes en direkte somme van bornologiese pseudotopologiese vektorruimtes bornologies is. Elke bornologiese lokaalkonvekse pseudotopologiese vektorruimte is die induktiewe limiet in die kategorie van pseudotopologiese vektorruimtes van 'n klas van lokaalkonvekse topologiese vektorruimtes.

ABSTRACT

Bornological pseudo-topological vector spaces

Bornological spaces were defined by Hogbe-Nlend in 1971 and pseudo-topological spaces by Fischer in 1959. In this paper properties of bornological pseudo-topological vector spaces are investigated. A characterization of such spaces is obtained and it is shown that quotient spaces and direct sums of bornological pseudo-topological vector spaces are bornological. Every bornological locally convex pseudo-topological vector space is shown to be the inductive limit in the category of pseudo-topological vector spaces of a family of locally convex topological vector spaces.

1. INLEIDING EN NOTASIE

Gestel X en Y is versamelings. As A 'n nie-leë deelversameling van X is, laat [A] die filter in X aandui wat deur $\{A\}$ voortgebring word; as $x \in X$ laat $[x]$ die filter in X aandui wat deur $\{\{x\}\}$ voortgebring word. Laat $\mathbb{F}(X)$ die versameling van alle filters in X aandui. As $\mathfrak{F} \in \mathbb{F}(X)$, laat $[\mathfrak{F}] = \{\mathfrak{G} \in \mathbb{F}(X)\colon \mathfrak{G} \supset \mathfrak{F}\}$. As H 'n nie-leë versameling van afbeeldings van X in Y is, skryf ons $H(A) = \{h(a)\colon h \in H,\ a \in A\}$. As $\mathfrak{h}$ 'n filter in die versameling van alle afbeeldings van X in Y is en $\mathfrak{F} \in \mathbb{F}(X)$, laat $\mathfrak{h}(\mathfrak{F})$ die filter in Y wees wat deur $\{H(F)\colon H \in \mathfrak{h},\ F \in \mathfrak{F}\}$ voortgebring word. Indien daar vir elke $x \in X$ 'n ooreenkomstige deelversameling τx van $\mathbb{F}(X)$ bestaan wat die volgende eienskappe het:

(1) as $\mathfrak{F} \in \tau x$, $\mathfrak{G} \in \mathbb{F}(X)$ en $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$ dan $\mathfrak{G} \in \tau x$,
(2) as $\mathfrak{F} \in \tau x$ en $\mathfrak{G} \in \tau x$ dan $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G} \in \tau x$, en
(3) $[x] \in \tau x$,

dan word die paar (X, τ) 'n pseudotopologiese ruimte genoem. As $\mathfrak{F} \in \tau x$ sê ons die filter $\mathfrak{F}$ konvergeer na x. As (X, τ) en (Y, σ) pseudotopologiese ruimtes is noem ons die afbeelding $f\colon X \to Y$ in die punt $x \in X$ kontinu (meer presies: τ-σ-kontinu) as vir $\mathfrak{F} \in \tau x$ volg dat $f(\mathfrak{F}) \in \sigma f(x)$, waar $f(\mathfrak{F})$ die filter in Y is wat deur $\{f(F)\colon F \in \mathfrak{F}\}$ voortgebring word. Verder noem ons f τ-σ-kontinu as f in elke punt van X τ-σ-kontinu is.

In hierdie artikel word alle vektorruimtes oor die liggaam Φ van reële of komplekse getalle gedefinieer. Gestel R is die versameling van reële getalle. As E 'n vektorruimte is, $x \in E$, $A \subset E$, $A \neq \emptyset$, $\alpha \in \Phi$, $\mathfrak{F} \in \mathbb{F}(E)$, $\mathfrak{G} \in \mathbb{F}(E)$ en $\mathfrak{h} \in \mathbb{F}(\Phi)$ dan is $x + \mathfrak{F}$, $\alpha\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F} + \mathfrak{G}$, $\mathfrak{h}x$, $\mathfrak{h}A$ en $\mathfrak{h}\mathfrak{F}$ filters in E wat onderskeidelik deur $\{x + F\colon F \in \mathfrak{F}\}$, $\{\alpha F\colon F \in \mathfrak{F}\}$, $\{F + G\colon F \in \mathfrak{F},\ G \in \mathfrak{G}\}$, $\{Hx\colon H \in \mathfrak{h}\}$, $\{HA\colon H \in \mathfrak{h}\}$ en $\{HF\colon H \in \mathfrak{h},\ F \in \mathfrak{F}\}$ voortgebring word. Laat $N_\varepsilon(0) = \{\lambda \in \Phi\colon |\lambda| \leq \varepsilon\}$ en laat $\mathfrak{N}(0)$ die filter in Φ wees wat deur $\{N_\varepsilon(0)\colon \varepsilon > 0\}$ voortgebring word. As E 'n vektorruimte is en (E, τ) is 'n pseudotopologiese ruimte sodat die afbeeldings $(x, y) \to x + y$ van $E \times E$ in E en $(\alpha, x) \to \alpha x$ van $\Phi \times E$ in E beide kontinu is dan word (E, τ) 'n pseudotopologiese vektorruimte genoem. Laat τ_Φ, waar $\tau_\Phi 0 = [\mathfrak{N}(0)]$, die pseudotopologiese vektorruimtestruktuur op Φ wees wat met die natuurlike topologie op Φ geassosieer is. De Bruyn[2] en Gähler[4] gee die volgende definisies:

DEFINISIE 1. *Gestel* (E, τ) *is 'n pseudotopologiese vektorruimte.*

(1) (E, τ) *is lokaalbegrens as elke* $\mathfrak{F} \in \tau 0$ *'n* τ*-begrensde versameling* B (*d.w.s.* $\mathfrak{N}(0)B \in \tau 0$) *bevat.*
(2) (E, τ) *is ewewigtig as vir elke* $\mathfrak{F} \in \tau 0$ *daar 'n ooreenkomstige ewewigtige filter* $\mathfrak{G}$ (*d.w.s.* $\mathfrak{N}(0)\mathfrak{G} = \mathfrak{G}$) *bestaan sodat* $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{F}$ *en* $\mathfrak{G} \in \tau 0$.
(3) (E, τ) *is bornologies as vir elke* $\mathfrak{F} \in \tau 0$ *daar 'n ooreenkomstige* τ*-begrensde versameling* B *bestaan sodat* $\mathfrak{N}(0)B \subset \mathfrak{F}$.
(4) (E, τ) *is lokaalkonveks as vir elke* $\mathfrak{F} \in \tau 0$ *daar 'n filter* $\mathfrak{G}$ *bestaan wat 'n filterbasis van konvekse versamelings het sodat* $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{F}$ *en* $\mathfrak{G} \in \tau 0$.
(5) (E, τ) *is absorberend as vir elke* $\mathfrak{F} \in \tau 0$ *daar 'n absorberende filter* $\mathfrak{G}$ (*d.w.s. elke element van* $\mathfrak{G}$ *is 'n absorberende versameling*) *bestaan sodat* $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{F}$ *en* $\mathfrak{G} \in \tau 0$.

Gestel $\mathfrak{F}$ en $\mathfrak{G}$ is filters, $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{F}$ en $\mathfrak{F}$ is absorberend. Dan is $\mathfrak{G}$ absorberend. Die pseudotopologiese vektorruimte (E, τ) is absorberend as en slegs as $\tau 0$ 'n absorberende filter bevat.

DEFINISIE 2. *Gestel* (E, τ) *en* (F, σ) *is pseudotopologiese vektorruimtes en* $f\colon E \to F$ *is 'n afbeelding.*

(1) f *is* τ*-*σ*-begrens as vir elke* τ*-begrensde deelversameling* B *van* E *volg dat* $f(B)$ *'n* σ*-begrensde deelversameling van* F *is.*

(2) *f is τ-σ-kwasibegrens as vir elke τ-kwasibegrensde filter $\mathfrak{F}$ in* E *(d.w.s. $\mathfrak{N}(0)\mathfrak{F} \in \tau 0$) volg dat $f(\mathfrak{F})$ 'n σ-kwasibegrensde filter in F is.*

(3) *f is τ-σ-byna kontinu as vir elke* $V \in \cap\{\mathfrak{G}{:}\mathfrak{G} \in \sigma 0\}$ *volg $f^{-1}(V) \in \cap\{\mathfrak{F}{:}\ \mathfrak{F} \in \tau 0\}$.*

2. KARAKTERISERING VAN BORNOLOGIESE PSEUDOTOPOLOGIESE VEKTORRUIMTES

Gestel (E, τ) en (F, σ) is pseudotopologiese vektorruimtes, f: E $\rightarrow$ F is 'n lineêre afbeelding en $\tau_b 0 = \{\mathfrak{F} \in \mathbb{F}(E){:}\ \mathfrak{F} \supset \mathfrak{N}(0)B$ vir 'n sekere τ-begrensde versameling B$\}$. Dan is (E, τ_b) 'n pseudotopologiese ruimte.[2] Verder is f τ-σ-begrens as en slegs as f τ_b-σ-kontinu is.

HULPSTELLING 1. *Gestel* (E, τ) *en* (F, σ) *is pseudotopologiese vektorruimtes en f*: E $\rightarrow$ F *is 'n lineêre afbeelding. Gestel* (E, τ) *is ewewigtig en vir elke $\mathfrak{F} \in \tau 0$ bestaan* $U \in \mathfrak{F}$ *sodat f(U) σ-begrens is. Dan is f τ-σ-kontinu.*

Bewys. Gestel $\mathfrak{G} \in \tau 0$. Daar bestaan $\mathfrak{h} \in \tau 0$ sodat $\mathfrak{N}(0)\mathfrak{h} \subset \mathfrak{G}$ en daar bestaan $M \in \mathfrak{N}(0)\mathfrak{h}$ sodat $\mathfrak{N}(0)f(M) \in \sigma 0$. Laat $V \in \mathfrak{N}(0)f(M)$, dan $V \supset N_\varepsilon(0)f(M) = f(N_\varepsilon(0)M)$ vir 'n sekere $\varepsilon > 0$. Omdat $N_\varepsilon(0)M \in \mathfrak{N}(0)\mathfrak{h} \subset \mathfrak{G}$ volg dat $V \in f(\mathfrak{G})$, dus $\mathfrak{N}(0)f(M) \subset f(\mathfrak{G})$. Dus $f(\mathfrak{G}) \in \sigma 0$.

HULPSTELLING 2. *Gestel* (E, τ) *en* (F, σ) *is pseudotopologiese vektorruimtes en f*: E $\rightarrow$ F *is 'n τ-σ-kwasibegrensde lineêre afbeelding. Dan*

(1) *is f τ-σ*-begrens;
(2) *as* (E, τ) *ewewigtig is, is f τ-σ-kontinu.*

Bewys. (1) Gestel B is 'n τ-begrensde deelversameling van E, dan $\mathfrak{N}(0)\mathfrak{N}(0)B \in \tau 0$, dus $\mathfrak{N}(0)f(\mathfrak{N}(0)B) \in \sigma 0$, d.w.s. $\mathfrak{N}(0)f(B) \in \sigma 0$. Dus is $f(B)$ σ-begrens.

(2) Gestel $\mathfrak{F} \in \tau 0$. Daar bestaan $\mathfrak{G} \in \tau 0$ sodat $\mathfrak{N}(0)\mathfrak{G} \subset \mathfrak{F}$. Omdat $\mathfrak{N}(0)\mathfrak{G}$ 'n τ-kwasibegrensde filter is volg dat $\mathfrak{N}(0)f(\mathfrak{N}(0)\mathfrak{G}) \in \sigma 0$, dus $\mathfrak{N}(0)f(\mathfrak{G}) \in \sigma 0$. Maar $\mathfrak{N}(0)f(\mathfrak{G}) \subset f(\mathfrak{F})$, dus $f(\mathfrak{F}) \in \sigma 0$.

HULPSTELLING 3. *Gestel* (E, τ) *en* (F, σ) *is pseudotopologiese vektorruimtes en f*: E $\rightarrow$ F *is 'n τ-σ-begrensde lineêre afbeelding. As* (E, τ) *lokaalbegrens is volg dat f τ-σ-kwasibegrens is.*

Bewys. Gestel $\mathfrak{F} \in \mathbb{F}(E)$ en $\mathfrak{N}(0)\mathfrak{F} \in \tau 0$. Daar bestaan 'n τ-begrensde versameling B sodat $B \in \mathfrak{N}(0)\mathfrak{F}$. Omdat $\mathfrak{N}(0)f(B) \subset \mathfrak{N}(0)f(\mathfrak{F})$ en $\mathfrak{N}(0)f(B) \in \sigma 0$ volg dat $\mathfrak{N}(0)f(\mathfrak{F}) \in \sigma 0$.

STELLING 1. *Gestel* (E, τ) *is 'n pseudotopologiese vektorruimte. Dan is die volgende ekwivalent:*

(1) (E, τ) *is bornologies.*
(2) (E, τ) *is lokaalbegrens en ewewigtig.*
(3) *Elke τ-σ-begrensde lineêre afbeelding van* E *in* F, *waar* (F, σ) *enige pseudotopologiese vektorruimte is, is τ-σ-kontinu.*
(4) (E, τ) *is lokaalbegrens en elke τ-σ-kwasibegrensde, lineêre afbeelding van* E *in* F, *waar* (F, σ) *enige pseudotopologiese vektorruimte is, is τ-σ-kontinu.*
(5) *As* (F, σ) *enige pseudotopologiese vektorruimte is en* H *is 'n versameling van lineêre afbeeldings van* E *in* F *sodat vir elke τ-begrensde versameling* B *die versameling* H(B) *σ-begrens is, dan* $[H](\mathfrak{F}) \in \sigma 0$ *vir elke* $\mathfrak{F} \in \tau 0$.

Bewys. Die implikasie (5) $\Rightarrow$ (3) is triviaal, (1) $\Rightarrow$ (2) en (1) $\Leftrightarrow$ (3) is deur De Bruyn[2] bewys. Die implikasies (2) $\Rightarrow$ (3), (3) $\Rightarrow$ (4) en (4) $\Rightarrow$ (3) volg onderskeidelik van hulpstelling 1, (2) en hulpstelling 2(1) en (3). Ons bewys (1) $\Rightarrow$ (5). Gestel (E, τ) is bornologies. As $\mathfrak{F} \in \tau 0$ bestaan 'n τ-begrensde versameling B sodat $\mathfrak{N}(0)B \subset \mathfrak{F}$. Laat (F, σ) 'n pseudotopologiese vektorruimte wees en laat H 'n versameling lineêre afbeeldings van E in F wees wat aan die aanname in (5) voldoen. As $\varepsilon > 0$ volg dat $N_\varepsilon(0)H(B) = H(N_\varepsilon(0)B)$, dus $\mathfrak{N}(0)H(B) \subset [H](\mathfrak{F})$. Dus $[H](\mathfrak{F}) \in \sigma 0$.

As X 'n versameling is word 'n nie-leë klas $\mathfrak{D}$ van deelversamelings van X 'n duale filter in X genoem as $\{X \backslash D{:}\ D \in \mathfrak{D}\}$ 'n filter in X is. Die volgende karakterisering van bornologiese pseudotopologiese vektorruimtes volg van stelling 1 en 5.19.3.[4]

STELLING 2. *Gestel* (E, τ) *is 'n bornologiese pseudotopologiese vektorruimte. Dan bestaan daar 'n duale filter* $\mathfrak{D} \neq \{\emptyset\}$ *in* E *sodat*

(1) *as* $A \in \mathfrak{D}$ *en* $B \in \mathfrak{D}$, *dan* $A + B \in \mathfrak{D}$,
(2) *as* $N \in \mathfrak{N}(0)$ *en* $A \in \mathfrak{D}$, *dan* $NA \in \mathfrak{D}$, *en*
(3) *as* $x \in E$, *dan* $\{x\} \in \mathfrak{D}$,

en waarvoor $\tau 0 = \{\mathfrak{F} \in \mathbb{F}(E){:}\ \mathfrak{F} \supset \mathfrak{N}(0)D$ vir 'n sekere $D \in \mathfrak{D}\}$. *Omgekeerd, as E 'n vektorruimte is en $\mathfrak{D} \neq \{\emptyset\}$ is 'n duale filter in E wat* (1), (2) *en* (3) *bevredig, en as $\tau 0$ soos hierbo gedefinieer word en $\tau x = \{x + \mathfrak{F}{:}\mathfrak{F} \in \tau 0\}$ vir elke $x \in$ E, dan is* (E, τ) *'n bornologiese pseudotopologiese verktorruimte. Verder is* (E, τ) *Hausdorff as en slegs as vir elke nieleë gebalanseerde versameling* $D \in \mathfrak{D}$ *volg dat* $\cap\{\lambda D{:}\ \lambda > 0\} = \{0\}$.

GEVOLGTREKKING. *Gestel* (E, τ) *is 'n bornologiese lokaalkonvekse pseudotopologiese vektorruimte. Dan bestaan daar 'n duale filter* $\mathfrak{D} \neq \{\emptyset\}$ *in* E *sodat*

(1) *as* $D \in \mathfrak{D}$, *dan is die absoluutkonvekse omhulsel van* D *'n element van* $\mathfrak{D}$, *en*
(2) *as* $x \in E$, *dan* $\{x\} \in \mathfrak{D}$,

en waarvoor $\tau 0 = \{\mathfrak{F} \in \mathbb{F}(E){:}\ \mathfrak{F} \supset \mathfrak{N}(0)D$ vir 'n sekere $D \in \mathfrak{D}\}$. *Omgekeerd, as* E *'n vektorruimte is en $\mathfrak{D} \neq \{\emptyset\}$ is 'n duale filter in* E *wat* (1) *en* (2) *bevredig, as $\tau 0$ soos hierbo gedefinieer word en $\tau x = \{x + \mathfrak{F}{:}\ \mathfrak{F} \in \tau 0\}$ vir elke $x \in$ E, dan is* (E, τ) *'n bornologiese lokaalkonvekse pseudotopologiese vektorruimte.*

Daar bestaan Hausdorff bornologiese lokaalkonvekse pseudotopologiese vektorruimtes wat nie topologiese vektorruimtes is nie (kyk 5.19[4]).

3. BASIESE EIENSKAPPE EN KONSTRUKSIES

PROPOSISIE 1. *Gestel* (E, τ) *is 'n bornologiese pseudotopologiese vektorruimte. As* U $\subset$ E *alle τ-begrensde versamelings absorbeer dan volg* U $\in \cap\{\mathfrak{F}: \mathfrak{F} \in \tau 0\}$.

Bewys. Gestel $\mathfrak{F} \in \tau 0$. Daar bestaan 'n τ-begrensde versameling B sodat $\mathfrak{N}(0)B \subset \mathfrak{F}$. Omdat U vir B absorbeer bestaan $\varepsilon > 0$ sodat $\lambda B \subset U$ vir alle λ waar $|\lambda| < \varepsilon$. Dus $N_\varepsilon(0)B \subset U$, d.w.s. $U \in \mathfrak{N}(0)B \subset \mathfrak{F}$. Dus $U \in \cap\{\mathfrak{F}:\mathfrak{F} \in \tau 0\}$.

PROPOSISIE 2. *Gestel* (E, τ) *is 'n pseudotopologiese vektorruimte met die eienskap dat as* U $\subset$ E *elke τ-begrensde versameling absorbeer, dan* U $\in \cap\{\mathfrak{F}:\mathfrak{F} \in \tau 0\}$. *As* (F, σ) *'n pseudotopologiese vektorruimte en* f: E $\rightarrow$ F *'n τ-σ-begrensde lineêre afbeelding is, dan volg dat f τ-σ-byna oral kontinu is.*

Bewys. Gestel $V \in \cap\{\mathfrak{G}: \mathfrak{G} \in \sigma 0\}$ en laat B 'n τ-begrensde versameling wees. Omdat $f(B)$ σ-begrens is volg dat $V \in \mathfrak{N}(0)f(B)$ en daar bestaan $\varepsilon > 0$ sodat $N_\varepsilon(0)f(B) \subset V$, d.w.s. $\lambda B \subset f^{-1}(V)$ vir alle λ waar $|\lambda| < \varepsilon$. Dus $f^{-1}(V) \in \cap\{\mathfrak{F}: \mathfrak{F} \in \tau 0\}$ en f is τ-σ-byna kontinu.

Kontinue afbeeldings tussen pseudotopologiese ruimtes is byna kontinu; die twee begrippe is dieselfde as die beeldruimte 'n topologiese ruimte is (kyk 3.6.3[4]).

PROPOSISIE 3. *Gestel* (E, τ) *is 'n pseudotopologiese vektorruimte met die eienskap dat daar 'n τ-begrensde versameling* $B \in \cap\{\mathfrak{F}: \mathfrak{F} \in \tau 0\}$ *bestaan. Dan is* (E, τ) *bornologies en absorberend. Verder is* (E, τ) *dan 'n lokaalbegrensde topologiese vektorruimte.*

Bewys. Gestel (F, σ) is 'n pseudotopologiese vektorruimte en f: E $\rightarrow$ F is 'n τ-σ-begrensde lineêre afbeelding. Omdat $f(B)$ σ-begrens is, is f τ-σ-kontinu (kyk Proposisie 2.2(a)[1]). Volgens stelling 1(3) is (E, τ) bornologies. Omdat B absorberend en τ-begrens is, is $\mathfrak{N}(0)B$ 'n filter in $\tau 0$ wat uit absorberende versamelings bestaan. Dus is (E, τ) absorberend. Ten slotte, gestel $\varepsilon > 0$. Dan $\varepsilon B \in \cap\{\mathfrak{F}: \mathfrak{F} \in \tau 0\}$ en $\varepsilon B \subset N_\varepsilon(0)B$, dus $N_\varepsilon(0)B \in \cap\{\mathfrak{F}:\mathfrak{F} \in \tau 0\}$. Dus $\mathfrak{N}(0)B \subset \cap\{\mathfrak{F}: \mathfrak{F} \in \tau 0\}$. Omdat B τ-begrens is, volg $\cap\{\mathfrak{F}: \mathfrak{F} \in \tau 0\} \in \tau 0$, dus $\tau 0 = [\mathfrak{N}(0)B]$ en (E, τ) is 'n topologiese vektorruimte waarin $\mathfrak{N}(0)B$ die omgewingsfilter van die oorsprong is. Omdat B 'n begrensde omgewing van die oorsprong in hierdie topologie is, is (E, τ) 'n lokaalbegrensde topologiese vektorruimte.

GEVOLGTREKKING. *Gestel* (E, τ) *is 'n Hausdorff lokaalbegrensde pseudotopologiese vektorruimte. As daar 'n τ-prekompakte versameling* $M \in \cap\{\mathfrak{F}: \mathfrak{F} \in \tau 0\}$ *bestaan, dan is* E *eindig-dimensionaal.*

Bewys. Volgens stelling 2.1[2] is M τ-begrens. Die bewering volg van proposisie 3 en die feit dat M 'n prekompakte omgewing van die oorsprong in die Hausdorff-topologie op E is.

Daar bestaan absorberende bornologiese pseudotopologiese vektorruimtes wat nie topologiese vektorruimtes is nie (kyk 5.19[4]).

VOORBEELD. Die reële pseudotopologiese vektorruimte (R, τ) met $\tau 0 = \{\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(R): [-\lambda, \lambda] \in \mathfrak{F}$ vir 'n sekere $\lambda > 0\}$ is lokaalbegrens maar nie bornologies nie.[2] Vir elke $\varepsilon > 0$ is die filter wat deur $[-\varepsilon, \varepsilon]$ voortgebring word 'n absorberende filter in $\tau 0$, dus is (R, τ) absorberend.

PROPOSISIE 4. *Gestel* (E, τ) *is 'n bornologiese pseudotopologiese vektorruimte. Dan is elke τ-τ_R-begrensde seminorm op* E *τ-τ_R-kontinu.*

Bewys. Gestel $x \in E$ en $\mathfrak{F} \in \tau x$. Daar bestaan $\mathfrak{G} \in \tau 0$ sodat $\mathfrak{F} = x + \mathfrak{G}$. Daar bestaan 'n τ-begrensde deelversameling B van E sodat $\mathfrak{N}(0)B \subset \mathfrak{G}$. Laat $\varepsilon > 0$ en gestel p is 'n τ-τ_R-begrensde seminorm op E. Dan $p(x) + N_\varepsilon(0)p(B) \supset p(x) + [0, \varepsilon]p(B) \supset p(x + N_\varepsilon(0)B)$, dus $p(\mathfrak{F}) \supset p(x + \mathfrak{N}(0)B) \supset p(x) + \mathfrak{N}(0)p(B)$. Omdat $p(B)$ τ_R-begrens is, volg $p(\mathfrak{F}) \in \tau_R p(x)$.

Vervolgens ondersoek ons eienskappe van bornologiese pseudotopologiese vektorruimtes wat op ander vektorruimtes oorgedra word. Gestel (E, τ) is 'n pseudotopologiese vektorruimte, M is 'n vektordeelruimte van E en f is die kanoniese afbeelding van E op E/M. Die kwosiënt pseudotopologiese vektorruimtestruktuur σ op E/M word gedefinieer as daardie waarvoor die versameling van alle filters $f(\mathfrak{F})$ (waar $\mathfrak{F} \in \tau x$ vir 'n sekere $x \in M$) 'n subbasis van $\sigma 0$ is (kyk 5.15c[4]).

PROPOSISIE 5. *Gestel* (E, τ) *is 'n bornologiese pseudotopologiese vektorruimte en* M *is 'n vektordeelruimte van* E. *Dan is* (E/M, σ), *waar σ die kwosiënt pseudotopologiese vektorruimtestruktuur op* E/M *is, 'n bornologiese pseudotopologiese vektorruimte.*

Bewys. Gestel $\mathfrak{G} \in \sigma 0$ en f: E $\rightarrow$ E/M is die kanoniese afbeelding. Daar bestaan $\mathfrak{F}_i \in \tau x_i$, waar $x_i \in M$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, sodat $\cap\{f(\mathfrak{F}_i): i = 1, 2, \ldots, n\} \subset \mathfrak{G}$. Vir elke i bestaan 'n τ-begrensde deelversameling B_i van E sodat $\mathfrak{N}(0)B_i \subset \mathfrak{F}_i - x_i$, dus $f(\mathfrak{N}(0)B_i) \subset f(\mathfrak{F}_i - x_i) = f(\mathfrak{F}_i)$. Laat $A = \cup\{f(B_i): i = 1, 2, \ldots, n\}$. Vir elke $\varepsilon > 0$ volg dat $N_\varepsilon(0)A = \cup\{f(N_\varepsilon(0)B_i): i = 1, 2, \ldots, n\} \in \cap\{f(\mathfrak{F}_i): i = 1, 2, \ldots, n\}$, dus $\mathfrak{N}(0)A \subset \mathfrak{G}$. Omdat f τ-σ-kontinu is, is A 'n σ-begrensde deelversameling van E/M. Dus is (E/M, σ) bornologies.

Gestel I is 'n nie-leë indeksversameling en vir elke $\alpha \in I$ is (E_α, τ_α) 'n pseudotopologiese vektorruimte oor Φ. Gestel E is die direkte som van die klas $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$ en vir elke $\alpha \in I$ is f_α: $E_\alpha \rightarrow E$ die kanoniese afbeelding. Die direkte som pseudotopologiese vektorruimtestruktuur σ op E word gedefinieer as daardie waarvoor die versameling van alle eindige somme van die tipe $f_{\alpha(1)}(\mathfrak{F}_1) + \ldots + f_{\alpha(n)}(\mathfrak{F}_n)$ (waar n 'n natuurlike getal is, $\mathfrak{F}_i \in \tau_{\alpha(i)}x_i$ vir $i = 1, 2, \ldots, n$ en $f_{\alpha(1)}(x_1) + \ldots +$

$f_{\alpha(n)}(x_n) = 0)$ 'n subbasis van $\sigma 0$ is (kyk 5.15d[4]). Dit volg dat elke f_α τ_α-σ-kontinu is.

PROPOSISIE 6. *Gestel* I *is 'n nie-leë indeksversameling. Vir elke* $\alpha \in$ I *laat* (E_α, τ_α) *'n bornologiese pseudotopologiese vektorruimte oor* Φ *wees. As* E *die direkte som van die klas* $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$ *is en* σ *is die direkte som pseudotopologiese vektorruimtestruktuur op* E, *dan is* (E, σ) *'n bornologiese pseudotopologiese vektorruimte.*

Die bewys is soortgelyk aan dié van proposisie 5.

STELLING 3. *Gestel* (E, τ) *is 'n bornologiese lokaalkonvekse pseudotopologiese vektorruimte. Daar bestaan 'n klas* $((E_\alpha, \tau_\alpha))_{\alpha \in I}$ *van lokaalkonvekse topologiese vektorruimtes (waar vir elke* $\alpha \in$ I τ_α *die geassosieerde lokaalkonvekse pseudotopologiese vektorruimtestruktuur op* E_α *is) en vir elke* $\alpha \in$ I *bestaan 'n lineêre afbeelding* f_α: $E_\alpha \to$ E *sodat* τ *die fynste pseudotopologiese vektorruimtestruktuur op* E *is waarvoor elke* f_α τ_α-τ-*kontinu is. Ook* E $= \cup\{f_\alpha(E_\alpha)$: $\alpha \in$ I$\}$. *Verder, as* (E, τ) *Hausdorff is, is elke* E_α *'n genormeerde ruimte.*

Bewys. Gestel B is 'n nie-leë absoluutkonvekse τ-begrensde deelversameling van E. Laat E_B = span B en gestel f_B: $E_B \to$ E is die gebruiklike injektiewe afbeelding. Die Minkowski-funksionaal p_B van B is 'n seminorm op E_B. Onder hierdie seminorm is E_B 'n lokaalkonvekse topologiese vektorruimte. Gestel $\mathfrak{U}_B$ is die omgewingsfilter van die oorsprong in E_B met betrekking tot die lokaalkonvekse topologie. Gestel τ_B, waar $\tau_B 0 = [\mathfrak{U}_B]$, is die geassosieerde pseudotopologiese vektorruimtestruktuur op E_B. Gestel τ' is die fynste pseudotopologiese vektorruimtestruktuur op E waarvoor elke f_B τ_B-τ'-kontinu is. Ons toon aan dat $\tau' 0 = \tau 0$. Laat $\mathfrak{F} \in \tau_B 0$, dan $f_B(\mathfrak{F}) \supset f_B(\mathfrak{U}_B)$. As $\varepsilon > 0$ dan volg dat $N_\varepsilon(0)B \supset \{x \in E_B$: $p_B(x) < \varepsilon/2\}$, dus $f_B(\mathfrak{U}_B) \supset \mathfrak{N}(0)B$. Omdat B τ-begrens is, volg $f_B(\mathfrak{F}) \in \tau 0$, d.w.s. f_B is τ_B-τ-kontinu. Omdat τ' die fynste pseudotopologiese vektorruimtestruktuur met hierdie eienskap is, volg $\tau' 0 \subset \tau 0$. Omgekeerd, laat $\mathfrak{F} \in \tau 0$. Daar bestaan 'n τ-begrensde deelversameling A van E sodat $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{N}(0)A$. Die absoluutkonvekse omhulsel D van A is τ-begrens en $\mathfrak{N}(0)A \supset \mathfrak{N}(0)D$, dus $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{N}(0)D$. As $\varepsilon > 0$ volg dat $\{x \in E_D$:$p_D(x) < \varepsilon\} \supset N_{\varepsilon/2}(0)D$. Laat $(\mathfrak{N}(0)D)_D$ die filter $\mathfrak{N}(0)D$ in E_D aandui, dan $\mathfrak{U}_D \subset (\mathfrak{N}(0)D)_D$, d.w.s. $(\mathfrak{N}(0)D)_D \in \tau_D 0$. Omdat f_D τ_D-τ'-kontinu is en $\mathfrak{N}(0)D = f_D((\mathfrak{N}(0)D)_D)$, volg $\mathfrak{N}(0)D \in \tau' 0$. Dus $\mathfrak{F} \in \tau' 0$ en gevolglik $\tau 0 \subset \tau' 0$. Gestel (E, τ) is ook Hausdorff. Gestel B is soos hierbo en x is 'n nie-nul element van E_B. Dan $\tau x \cap \tau 0 = \emptyset$. Gestel $p_B(x) = 0$, dan $x \in \lambda$B vir alle $\lambda > 0$, d.w.s. $x \in N_\varepsilon(0)B$ vir alle $\varepsilon > 0$. Dus $\mathfrak{N}(0)B \subset [x]$ en $[x] \in \tau x \cap \tau 0$, 'n teenstrydigheid. Derhalwe $p_B(x) > 0$ en is p_B 'n norm op E_B.

VOORBEELD. Gestel E is 'n vektorruimte met basis $\{y_\alpha$: $\alpha \in$ I$\}$. 'n Pseudotopologiese vektorruimtestruktuur τ op E word gedefinieer as daardie waarvoor $\tau 0 = \{\mathfrak{F} \in$ F(E): $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{N}(0)x_1 + \ldots + \mathfrak{N}(0)x_n$ vir 'n sekere eindige deelversameling $\{x_1, \ldots, x_n\}$ van E$\}$. Volgens stelling 1 en 5.10.4[4] en 5.19.16[4] is (E, τ) 'n bornologiese lokaalkonvekse pseudotopologiese vektorruimte. As J 'n nie-leë eindige deelversameling van I is, laat E_J = span $\{y_\alpha$: $\alpha \in$ J$\}$. Laat τ_J die pseudotopologiese vektorruimtestruktuur op E_J wees wat met die natuurlike topologie op E_J geassosieer is. Volgens Gähler 5.19.16[4] is (E, τ) die induktiewe limiet in die kategorie van pseudotopologiese vektorruimtes van die klas $((E_J, \tau_J)$: J is 'n nie-leë eindige deelversameling van I).

Die outeur is dankbaar vir finansiële ondersteuning deur die WNNR en die Universiteit van Stellenbosch.

VERWYSINGS

1. De Bruyn, G. F. C. (1975). Concepts in vector spaces with convergence structures, *Canadian Math. Bull.*, 18, 499-502.
2. De Bruyn, G. F. C. (1984). On vector spaces with locally bounded convergence structures, *Quaestiones Math.* 7, 377-383.
3. Fischer, H. R. (1959). Limesräume, *Math. Ann.* 137, 269-303.
4. Gähler, W. (1977/78). *Grundstrukturen der Analysis* (Birkhäuser Verlag, Basel – Stuttgart).
5. Hogbe-Nlend, H. (1971). Théorie des bornologies et applications, *Lecture Notes in Math.* 213 (Springer-Verlag).