



'n Kortpad om niesentrale, tweeveranderlike verdelings deur samestelling te ontwikkel

Author:

Johan Ferreira¹

Affiliation:

¹Department of Statistics, University of Pretoria, South Africa

Correspondence to:

Johan Ferreira

Email:

johan.ferreira@up.ac.za

Postal address:

Private Bag X20, Hatfield 0028, South Africa

How to cite this abstract:

Ferreira, J., 2015, "n Kortpad om niesentrale, tweeveranderlike verdelings deur samestelling te ontwikkel", *Suid-Afrikaanse Tydskrif vir Natuurwetenskap en Tegnologie* 34(1), Art. #1319, 2 pages. <http://dx.doi.org/10.4102/satnt.v34i1.1319>

Note:

A selection of conference proceedings: Student Symposium in Science, 06 and 07 November 2014, Science Campus, University of South Africa. Organising committee: Mr Rudi W. Pretorius and Ms Andrea Lombard (Department of Geography, University of South Africa) and Dr Hertzog Bisset (South African Nuclear Energy Corporation [NECSA]).

Copyright:

© 2015. The Authors. Licensee: AOSIS OpenJournals. This work is licensed under the Creative Commons Attribution License.

Read online:



Scan this QR code with your smart phone or mobile device to read online.

A shortcut to develop bivariate noncentral distributions via compounding. Noncentral distributions form an integral part of statistical inference. For example, the noncentral chi-square distribution is particularly useful as it represents the sampling distribution of the sample variance from a normal distribution with unstable expected value. This study develops bivariate noncentral distributions via the compounding method. Some composite distributions (such as the product, ratio, and proportion) are derived, their properties studied, and applied to rainfall data.

Inleiding

Yunus en Khan (2011) stel 'n metode voor om niesentrale, tweeveranderlike chi-kwadraatverdelings te verkry, maar verskaf nie genoegsame teoretiese staving vir hul argument nie. Hierdie studie voeg waarde tot die literatuur by deur die geldigheid van die samestellingsmetode te verskaf om niesentrale, tweeveranderlike verdelings te verkry, en brei die resultate van Yunus en Khan (2011) verder uit.

Beskrywing

'n Waarskynlikheidsdigtheidsfunksie (wdf.) $f(x)$ het 'n saamgestelde wdf. met algemene vorm $f(x) = \int f(x|\theta)h(\theta)d\theta$, waar $f(x|\theta)$ 'n voorwaardelike wdf. is en dit afhanklik is van die parameter θ ; dié parameter is onderhewig aan statistiese variasie, soos beskryf deur die wdf. $h(\theta)$, die samestellings-wdf. Indien $h(\theta)$ diskreet is, word die integraal met 'n sommasie vervang om 'n saamgestelde wdf. te verkry met die vorm $f(x) = \sum f(x|\theta)h(\theta)$.

Sentrale, tweeveranderlike, saamgestelde, uitgebreide chi-kwadraatverdeling

Beskou die sentrale, tweeveranderlike, saamgestelde, uitgebreide chi-kwadraatverdeling van Wright en Kennedy (2002):

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n_1}{2} + i_1\right) \Gamma\left(\frac{n_2}{2} + i_2\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right) i_1! \Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right) i_2!} \gamma^{2(i_1+i_2)} (1-\gamma^2)^{\frac{n_1+n_2}{2}} f_{X_1}(x_1 | i_1) f_{X_2}(x_2 | i_2)$$

$$\text{waar } f_{X_v}(x_v | i_v) = \frac{x_v^{\frac{n_v}{2} + i_v - 1} e^{-\frac{x_v}{2(1-\gamma^2)}}}{(2(1-\gamma^2))^{\frac{n_v}{2} + i_v} \Gamma\left(\frac{n_v}{2} + i_v\right)} \quad \text{vir } v = 1, 2, x_1, x_2 > 0, \quad [\text{Vgl. 1}]$$

en parameterstruktuur sodanig dat $n_1, n_2 > 0$ en $0 \leq \gamma^2 \leq 1$.

Gevolgtik kan 'n voorwaardelike wdf. hieruit gedefinieer word:

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2 | k_1, k_2) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} C \frac{x_1^{\frac{n_1}{2} + i_1 + k_1 - 1} e^{-\frac{x_1}{2(1-\gamma^2)}}}{(2(1-\gamma^2))^{\frac{n_1}{2} + i_1 + k_1} \Gamma\left(\frac{n_1}{2} + i_1 + k_1\right)} \frac{x_2^{\frac{n_2}{2} + i_2 + k_2 - 1} e^{-\frac{x_2}{2(1-\gamma^2)}}}{(2(1-\gamma^2))^{\frac{n_2}{2} + i_2 + k_2} \Gamma\left(\frac{n_2}{2} + i_2 + k_2\right)}$$

[Vgl. 2]

met C die geskikte normaliseringskonstante.



Niesentrale, tweeveranderlike, saamgestelde, uitgebreide chi-kwadraatverdeling deur Poisson-samestelling

Deur die samestellingsmetode te gebruik, soos beskryf in afdeling 2, kan die niesentrale geval van die sentrale, tweeveranderlike, saamgestelde, uitgebreide chi-kwadraatverdeling soos voorgestel in afdeling 3, verkry word:

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \quad [\text{Vgl. 3}]$$

$$C \frac{x_1^{\frac{n_1}{2} + i_1 + k_1 - 1} e^{-\frac{x_1}{2(1-\gamma^2)}}}{\left(2(1-\gamma^2)\right)^{\frac{n_1}{2} + i_1 + k_1} \Gamma\left(\frac{n_1}{2} + i_1 + k_1\right)}$$

$$\frac{x_2^{\frac{n_2}{2} + i_2 + k_2 - 1} e^{-\frac{x_2}{2(1-\gamma^2)}}}{\left(2(1-\gamma^2)\right)^{\frac{n_2}{2} + i_2 + k_2} \Gamma\left(\frac{n_2}{2} + i_2 + k_2\right)} e^{\frac{\theta_1}{2} \left(\frac{\theta_1}{2}\right)^{k_1}} e^{-\frac{\theta_2}{2} \left(\frac{\theta_2}{2}\right)^{k_2}}$$

$$k_1! \quad k_2!$$

met $x_1, x_2 > 0$, en parameterstruktuur sodanig dat $n_1, n_2, \theta_1, \theta_2 > 0$ en $0 \leq \gamma^2 \leq 1$.

Momentvoortbringendefunksie

Die momentvoortbringendefunksie (mvf.) van die wdf. gegee in afdeling 4 word verkry deur:

$$M_{X_1, X_2}(t_1, t_2) = \left(1 - 2(1-\gamma^2)t_1\right)^{-\frac{n_1}{2}} \left(1 - 2(1-\gamma^2)t_2\right)^{-\frac{n_2}{2}} \quad [\text{Vgl. 4}]$$

$$\left(1 - \gamma^2\right)^{\frac{n_1 + n_2}{2}} \left(1 - \frac{\gamma^2}{2(1-\gamma^2)t_1}\right)^{-\frac{n_1}{2}}$$

$$\left(1 - \frac{\gamma^2}{2(1-\gamma^2)t_2}\right)^{-\frac{n_2}{2}} e^{\theta_1 t_1 \left(\frac{1}{(1-\gamma^2)} - 2t_1\right)^{-1}} e^{\theta_2 t_2 \left(\frac{1}{(1-\gamma^2)} - 2t_2\right)^{-1}}.$$

Hierdie mvf. is ekwivalent aan die mvf. van die niesentrale, tweeveranderlike chi-kwadraatverdeling soos beskou deur Van den Berg (2010). Hierdie ekwivalensie beklemtoon die gebruik en eenvoud van die samestellingsmetode om niesentrale verdelings te vind.

Niesentrale, tweeveranderlike, saamgestelde, uitgebreide F-verdeling

Deur 'n geskikte transformasie te neem word die wdf. van die ooreenstemmende niesentrale, tweeveranderlike,

saamgestelde, uitgebreide F-verdeling maklik afgelei. Die wdf. word afgelei en bestudeer in Ferreira (2014).

Toepassing

Reënvaldata word gebruik om hierdie modelle te illustreer. Beskou in besonder die verdeling van $\frac{Y_1}{Y_2}$ (verhouding van komponente van die niesentrale, tweeveranderlike, saamgestelde, uitgebreide F-verdeling) waarvan die wdf. in Ferreira (2014) afgelei en bestudeer is. Dié verdeling is toepaslik op reënvaldata van die deelstaat Nebraska in die VSA – in besonder is daar na die droogteduurte van twee streke (streke 1 en 9) van dié deelstaat gekyk. Die parameters is beraam deur die metode van maksimum aanneemlikheid in die SAS/IML-taal, terwyl die Akaike-inligtingskriteria ook bereken is. Volgens dié kriteria is die model onder beskouing meer wenslik as 'n ander bekende model in die literatuur (sien Ferreira [2014]). Die volgende waarskynlikheid is ook bereken:

$$P\left(\frac{Y_1}{Y_2} > 1\right) = 1 - P\left(\frac{Y_1}{Y_2} < 1\right) = 1 - 0.468634 = 0.5313,$$

en word geïnterpreteer as die waarskynlikheid dat streek 1 se droogte langer sal duur as dié van streek 9. Hierdie waarneming strook met die geografiese ligging van Nebraska en bevestig die nuttigheid van hierdie model.

Samevatting

Ter samevatting, hierdie studie toon aan hoe 'n bekende statistiese metode gebruik word om niesentrale, tweeveranderlike verdelings te verkry. Dié metode, getiteld die samestellingsmetode, is wiskundig gerieflik en deursigtig. Die sistematiese metode van samestelling bly behoue in alle afleidings en beskrywings, en verskaf waardevolle insig tot die konstruksie en vorm van niesentrale, tweeveranderlike verdelings.

Literatuurverwysings

- Ferreira, J.T., 2014, 'The compounding method for finding bivariate noncentral distributions', MSc dissertation, University of Pretoria, Pretoria.
- Van den Berg, J. 2010, 'Bivariate distributions with correlated chi-square marginal: Product and ratio components', MSc dissertation, University of South Africa, Pretoria.
- Wright, K. & Kennedy, W.J., 2002, 'Self-validated computation for the probabilities of the central bivariate chi-square distribution and a bivariate F distribution', *Journal of Statistical Computation and Simulation* 72, 6375. <http://dx.doi.org/10.1080/00949650211422>
- Yunus, R.M. & Khan, S., 2011, 'The bivariate noncentral chi-square distribution – A compound distribution approach', *Applied Mathematics and Computation* 217, 6237–6247. <http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2010.12.112>