Navorsings- en Oorsigartikels

Die behoud van M-injektiwiteit onder die neem van faktormodule

D. Döman
Departement Wiskunde, Universiteit van Pretoria, Pretoria 0002

UITTREKSEL

Vir 'n gegewe moduul M is die faktormodule van M-injektiewe module nie noodwendig M-injektief nie. Nodige en voldoende voorwaardes word afgelei waaronder dit wel die geval is as M projektief is. Die resultaat word gebruik om hereditêre ringe mee te karakteriseer.

ABSTRACT

The preservation of M-injectivity in the forming of factor modules.

For a given module M the factor modules of M-injective modules are not necessarily M-injective. Necessary and sufficient conditions are derived under which it is the case if M is projective. The result is used to characterize hereditary rings.

Dit is bekend dat elke direkte sommand van 'n M-injektiewe moduul M-injektief is en dat elke direkte produk van M-injektiewe module M-injektief is. As M eindig voortgebring is, is elke direkte som van M-injektiewe module M-injektief as en slegs as M Noethers is.[2] Dit is egter nog onbekend watter voorwaardes nodig en voldoende is sodat faktormodule van M-injektiewe module M-injektief is of sodat ondermodule van M-injektiewe module M-injektief is. In hierdie artikel word vir die geval waarby M projektief is, nodige en voldoende voorwaardes gegee waaronder faktormodule van M-injektiewe module M-injektief is.

Tensy anders vermeld, is alle module wat beskou word, linker unitale R-module, waar R 'n willekeurige vaste ring met eenheidselement is. Alle afbeeldings wat gebruik word, is R-homomorfismes. Die simbool M stel deurgaans 'n willekeurige maar vaste R-moduul voor.

1. Definisie

'n Moduul N is *M-injektief* as elke diagram van module

$$\begin{tikzcd} O \arrow[r] & X \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\phi"'] & M \arrow[dl, dashed] \\ & N & \end{tikzcd}$$

met eksakte ry, voltooi kan word om te kommuteer.

2. Voorbeeld

Beskou die Z-module Z, Z_3 en Z_6. Aangesien daar geen nie-nul homomorfie van 'n torsiegroep na 'n torsievrye groep bestaan nie, volg triviaal dat Z Z_6-injektief is. Verder is $Z_3 \cong Z/3Z$, maar Z_3 is nie Z_6-injektief nie, want vir die diagram

$$\begin{tikzcd} O \arrow[r] & Z_3 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\iota"'] & Z_6 \\ & Z_3 & \end{tikzcd}$$

met ι die identiteitsafbeelding en α geïnduseer deur $1 \to 2$, bestaan geen homomorfie $\psi: Z_6 \to Z_3$ wat die diagram laat kommuteer nie.

As M 'n semi-eenvoudige moduul is, sal alle faktormodule van M-injektiewe module natuurlik M-injektief wees. Die voorbeeld toon egter aan dat dit nie vir elke moduul M die geval is nie. Ten einde vir projektiewe module M nodige en voldoende voorwaardes te gee waaronder M-injektiwiteit behoue bly onder die neem van faktormodule, is die volgende definisie nodig.

3. Definisie

'n Moduul A is *projektêr* as elke ondermoduul van A projektief is.

4. Opmerkings

(1) Elke semi-eenvoudige projektiewe moduul is projektêr.
(2) As R semi-eenvoudig is, is elke R-moduul projektêr.
(3) Elke projektêre moduul is projektief.

5. Stelling

(1) As M projektêr is, is faktormodule van M-injektiewe module M-injektief.
(2) As faktormodule van injektiewe module M-injektief is en M is projektief, dan is M projektêr.

Bewys

(1) Gestel M is projektêr en N' is 'n faktormoduul van 'n M-injektiewe moduul N. Laat M' 'n willekeurige ondermoduul van M wees, ϕ: $M' \to N'$ 'n willekeurige homomorfie en beskou die diagram

$$\begin{tikzcd}
O \arrow[r] & M' \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\phi"] \arrow[dl, dashed, "\alpha"'] & M \arrow[dll, dashed, "\beta"] \\
N \arrow[r, "\eta"'] & N' \arrow[r] & O
\end{tikzcd}$$

met ι: $M' \to M$ die inbedding en η: $N \to N'$ die natuurlike epimorfie. Aangesien M' projektief is, bestaan 'n homomorfie α: $M' \to N$ so dat $\eta\alpha = \phi$. Ook bestaan 'n homomorfie β: $M \to N$ so dat $\beta\iota = \alpha$, want N is M-injektief. Nou is $\psi = \eta\beta$: $M \to N'$ só dat $\psi\iota = \eta\beta\iota = \eta\alpha = \phi$ en dus is N' M-injektief.

(2) Gestel faktormodule van M-injektiewe module is M-injektief en M is projektief. Laat M' 'n willekeurige ondermoduul van M wees. Om te bewys dat M' projektief is, laat η: $Y \to Z$ 'n willekeurige epimorfie wees en ϕ: $M' \to Z$ 'n willekeurige homomorfie. Beskou nou die diagram

$$\begin{tikzcd}
 & & & M' \arrow[r, "\iota'"] \arrow[dl, dashed, "\Phi'"'] \arrow[d, "\phi"] \arrow[ddll, dashed, "\Phi"] & M \arrow[ddll, dashed, "\psi"] \arrow[ddl, dashed, "\alpha"] \\
O \arrow[r] & \operatorname{Ker}\eta \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\iota"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & O \\
O \arrow[r] & \operatorname{Kern}\eta \arrow[r, "\iota\nu"] & E(Y) \arrow[r, "\delta"] & A \arrow[r] & O
\end{tikzcd}$$

waar E(Y) die injektiewe omhulsel van Y is, ν, ι en ι' inbeddings en waar A verkry is deur die uitstoot te vorm. Aangesien E(Y) injektief is, is A M-injektief. Daar bestaan dus 'n homomorfie α: $M \to A$ só dat $\alpha\iota' = \gamma\phi$. Maar M is projektief, dus bestaan 'n homomorfie ψ: $M \to E(Y)$ só dat $\delta\psi = \alpha$. Gevolglik is $\Phi = \psi\iota'$: $M' \to E(Y)$ so dat $\delta\Phi = \delta\psi\iota' = \alpha\iota' = \gamma\phi$.

Gestel nou $x \in \operatorname{Im}\Phi$. Laat $m' \in M'$ so wees dat $\Phi(m') = x$. Dan is $\delta(x) = \delta\Phi(m')$. Laat $y \in Y$ so wees dat $\eta(y) = \phi(m')$. Dus is $\delta(x) = \gamma\eta(y) = \delta\iota(y)$, waaruit volg dat $x - \iota(y) \in \operatorname{Ker}\delta = \operatorname{Im}\iota\nu$. Gevolglik is $x \in \operatorname{Im}\iota$ en dus is $\operatorname{Im}\Phi \subseteq \operatorname{Im}\iota$.

Definieer nou Φ': $M' \to Y$ deur $\Phi' = \iota^{-1}\Phi$.
Dan geld dat $\gamma\eta\Phi' = \gamma\eta\iota^{-1}\Phi = \delta\iota\iota^{-1}\Phi = \delta\Phi = \gamma\phi$.

Aangesien ι 'n monomorfie is, is ook γ 'n monomorfie en dus is $\eta\Phi' = \phi$. Dit bewys dat M' projektief is en gevolglik is M projektêr. □

6. Gevolg

Die volgende bewerings is ekwivalent vir 'n projektiewe moduul M:

(1) M is projektêr;
(2) Faktormodule van M-injektiewe module is M-injektief;
(3) Faktormodule van injektiewe module is M-injektief.

Aangesien 'n ring R linksherediêr is as en slegs as ondermodule van projektiewe R-module projektief is[1], gee Gevolg 6 aanleiding tot die volgende:

7. Stelling

Die volgende bewerings is ekwivalent vir 'n ring R:

(1) R is linksherediêr;
(2) Faktormodule van M-injektiewe module is M-injektief vir alle projektiewe module M;
(3) Faktormodule van injektiewe module is M-injektief vir alle projektiewe module M.

SUMMARY

For a given module M a module N is M-injective if for every monomorphism γ: $X \to M$ and any homomorphism ϕ: $X \to N$ there exists a homomorphism ψ: $M \to N$ such that $\psi\gamma = \phi$. A module A is projectary if every submodule of A is projective. The following statements are equivalent for a projective module M:

(1) M is projectary;
(2) Factor modules of M-injective modules are M-injective;
(3) Factor modules of injective modules are M-injective.

This leads to the equivalence of the following statements for any ring R:

(1) R is left hereditary;
(2) Factor modules of M-injective modules are M-injective for every projective module M;
(3) Factor modules of injective modules are M-injective for every projective module M.

VERWYSINGS

1. Carten, H. & Eilenberg, S. (1973). *Homological algebra* (Princeton Univ. Press, Princeton, N.J.) pp. 14-15.
2. Ramamurthi, V.S. & Rangaswamy, K.M. (1973). On finitely injective modules, *Jour. Australian Math. Soc.*, 16, 239-248.