

## Navorsings- en Oorsigartikels

# Die behoud van M-injektiviteit onder die neem van faktormodule

D. Döman

Departement Wiskunde, Universiteit van Pretoria, Pretoria 0002

### UITTREKSEL

Vir 'n gegewe moduul  $M$  is die faktormodule van  $M$ -injektiewe module nie noodwendig  $M$ -injektief nie. Nodige en voldoende voorwaardes word afgelei waaronder dit wel die geval is as  $M$  projektief is. Die resultaat word gebruik om hereditêre ringe mee te karakteriseer.

### ABSTRACT

*The preservation of  $M$ -injectivity in the forming of factor modules.*

*For a given module  $M$  the factor modules of  $M$ -injective modules are not necessarily  $M$ -injective. Necessary and sufficient conditions are derived under which it is the case if  $M$  is projective. The result is used to characterize hereditary rings.*

Dit is bekend dat elke direkte sommand van 'n  $M$ -injektiewe moduul  $M$ -injektief is en dat elke direkte produk van  $M$ -injektiewe module  $M$ -injektief is. As  $M$  eindig voortgebring is, is elke direkte som van  $M$ -injektiewe module  $M$ -injektief as en slegs as  $M$  Noethers is.<sup>2</sup> Dit is egter nog onbekend watter voorwaardes nodig en voldoende is sodat faktormodule van  $M$ -injektiewe module  $M$ -injektief is of sodat ondermodule van  $M$ -injektiewe module  $M$ -injektief is. In hierdie artikel word vir die geval waarby  $M$  projektief is, nodige en voldoende voorwaardes gegee waaronder faktormodule van  $M$ -injektiewe module  $M$ -injektief is.

Tensy anders vermeld, is alle module wat beskou word, linker unitale  $R$ -module, waar  $R$  'n willekeurige vaste ring met eenheidselement is. Alle afbeeldings wat gebruik word, is  $R$ -homomorfismes. Die simbool  $M$  stel deurgaans 'n willekeurige maar vaste  $R$ -moduul voor.

### 1. Definisie

'n Moduul  $N$  is  *$M$ -injektief* as elke diagram van module

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{\gamma} & M \\ & & \downarrow \phi & \searrow & \\ & & N & & \end{array}$$

met eksakte ry, voltooi kan word om te kommuteer.

### 2. Voorbeeld

Beskou die  $Z$ -module  $Z$ ,  $Z_3$  en  $Z_6$ . Aangesien daar

geen nie-nul homomorfie van 'n torsiegroep na 'n torsievrye groep bestaan nie, volg triviaal dat  $Z$   $Z_6$ -injektief is. Verder is  $Z_3 \cong Z/3Z$ , maar  $Z_3$  is nie  $Z_6$ -injektief nie, want vir die diagram

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & Z_3 & \xrightarrow{\alpha} & Z_6 \\ & & \downarrow \iota & & \\ & & Z_3 & & \end{array}$$

met  $\iota$  die identiteitsafbeelding en  $\alpha$  geïnduseer deur  $1 \rightarrow 2$ , bestaan geen homomorfie  $\psi: Z_6 \rightarrow Z_3$  wat die diagram laat kommuteer nie.

As  $M$  'n semi-eenvoudige moduul is, sal alle faktormodule van  $M$ -injektiewe module natuurlik  $M$ -injektief wees. Die voorbeeld toon egter aan dat dit nie vir elke moduul  $M$  die geval is nie. Ten einde vir projektiewe module  $M$  nodige en voldoende voorwaardes te gee waaronder  $M$ -injektiviteit behoue bly onder die neem van faktormodule, is die volgende definisie nodig.

### 3. Definisie

'n Moduul  $A$  is *projektêr* as elke ondermoduul van  $A$  projektief is.

### 4. Opmerkings

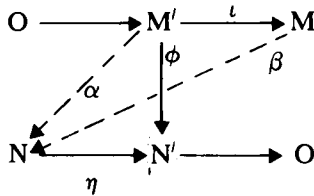
- (1) Elke semi-eenvoudige projektiewe moduul is projektêr.
- (2) As  $R$  semi-eenvoudig is, is elke  $R$ -moduul projektêr.
- (3) Elke projektêre moduul is projektief.

**5. Stelling**

- (1) As M projektêr is, is faktormodule van M-injektiewe module M-injektief.
- (2) As faktormodule van injektiewe module M-injektief is en M is projektief, dan is M projektêr.

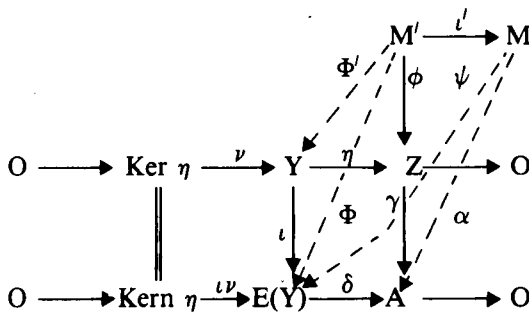
**Bewys**

- (1) Gestel M is projektêr en N' is 'n faktormoduul van 'n M-injektiewe moduul N. Laat M' 'n willekeurige ondermoduul van M wees,  $\phi: M' \rightarrow N'$  'n willekeurige homomorfe en beskou die diagram



met  $\iota: M' \rightarrow M$  die inbedding en  $\eta: N \rightarrow N'$  die natuurlike epimorfie. Aangesien  $M'$  projektief is, bestaan 'n homomorfe  $\alpha: M' \rightarrow N$  so dat  $\eta\alpha = \phi$ . Ook bestaan 'n homomorfe  $\beta: M \rightarrow N$  so dat  $\beta\iota = \alpha$ , want N is M-injektief. Nou is  $\psi = \eta\beta: M \rightarrow N'$  s $\acute{o}$  dat  $\psi\iota = \eta\beta\iota = \eta\alpha = \phi$  en dus is  $N'$  M-injektief.

- (2) Gestel faktormodule van M-injektiewe module is M-injektief en M is projektief. Laat M' 'n willekeurige ondermoduul van M wees. Om te bewys dat M' projektief is, laat  $\eta: Y \rightarrow Z$  'n willekeurige epimorfie wees en  $\phi: M' \rightarrow Z$  'n willekeurige homomorfe. Beskou nou die diagram



waar  $E(Y)$  die injektiewe omhulsel van Y is,  $\nu$ ,  $\iota$  en  $\iota'$  inbeddings en waar A verkry is deur die uitstoot te vorm. Aangesien  $E(Y)$  injektief is, is A M-injektief. Daar bestaan dus 'n homomorfe  $\alpha: M \rightarrow A$  s $\acute{o}$  dat  $\alpha\iota' = \gamma\phi$ . Maar M is projektief, dus bestaan 'n homomorfe  $\psi: M \rightarrow E(Y)$  s $\acute{o}$  dat  $\delta\psi = \alpha$ . Gevolglik is  $\Phi = \psi\iota': M' \rightarrow E(Y)$  so dat  $\delta\Phi = \delta\psi\iota' = \alpha\iota' = \gamma\phi$ .

Gestel nou  $x \in \text{Im } \Phi$ . Laat  $m' \in M'$  so wees dat  $\Phi(m') = x$ . Dan is  $\delta(x) = \delta\Phi(m')$ . Laat  $y \in Y$  so wees dat  $\eta(y) = \phi(m')$ . Dus is  $\delta(x) = \gamma\eta(y) = \delta\iota(y)$ , waaruit volg dat  $x - \iota(y) \in \text{Ker } \delta = \text{Im } \iota\nu$ . Gevolglik is  $x \in \text{Im } \iota$  en dus is  $\text{Im } \Phi \subseteq \text{Im } \iota$ .

Definieer nou  $\Phi': M' \rightarrow Y$  deur  $\Phi' = \iota^{-1}\Phi$ .

Dan geld dat  $\gamma\eta\Phi' = \gamma\eta\iota^{-1}\Phi = \delta\iota\iota^{-1}\Phi = \delta\Phi = \gamma\phi$ .

Aangesien  $\iota$  'n monomorfe is, is ook  $\gamma$  'n monomorfe en dus is  $\eta\Phi' = \phi$ . Dit bewys dat  $M'$  projektief is en gevolglik is M projektêr.  $\square$

**6. Gevolg**

Die volgende bewerings is ekwivalent vir 'n projektiewe moduul M:

- (1) M is projektêr;
- (2) Faktormodule van M-injektiewe module is M-injektief;
- (3) Faktormodule van injektiewe module is M-injektief.

Aangesien 'n ring R linkshereditêr is as en slegs as ondermodule van projektiewe R-module projektief is<sup>1</sup>, gee Gevolg 6 aanleiding tot die volgende:

**7. Stelling**

Die volgende bewerings is ekwivalent vir 'n ring R:

- (1) R is linkshereditêr;
- (2) Faktormodule van M-injektiewe module is M-injektief vir alle projektiewe module M;
- (3) Faktormodule van injektiewe module is M-injektief vir alle projektiewe module M.

**SUMMARY**

For a given module M a module N is M-injective if for every monomorphism  $\gamma: X \rightarrow M$  and any homomorphism  $\phi: X \rightarrow N$  there exists a homomorphism  $\psi: M \rightarrow N$  such that  $\psi\gamma = \phi$ . A module A is projectary if every submodule of A is projective. The following statements are equivalent for a projective module M:

- (1) M is projectary;
- (2) Factor modules of M-injective modules are M-injective;
- (3) Factor modules of injective modules are M-injective.

This leads to the equivalence of the following statements for any ring R:

- (1) R is left hereditary;
- (2) Factor modules of M-injective modules are M-injective for every projective module M;
- (3) Factor modules of injective modules are M-injective for every projective module M.

**VERWYSINGS**

1. Carten, H. & Eilenberg, S. (1973). *Homological algebra* (Princeton Univ. Press, Princeton, N.J.) pp. 14-15.
2. Ramamurthi, V.S. & Rangaswamy, K.M. (1973). On finitely injective modules, *Jour. Australian Math. Soc.*, 16, 239-248.