Eienskappe van die annuleerders van module

Annemarie Esterhuyse
Departement Wiskunde, Universiteit van Stellenbosch, Stellenbosch 7600

OPSOMMING

Die annuleerder van 'n R moduul M, gedefinieer deur $\ell_R(M) = \{r \in R\ rm = 0,\ m \in M\}$ *is 'n tweesydige ideaal in R wat gekarakteriseer kan word as die deursnede van alle linkerideale I van R sodanig dat* $R/_I$ *ingebed kan word in M. Sommige van die verwantskappe wat bestaan tussen die eienskappe van 'n moduul en sy annuleerder word uiteengesit in Stelling 4.*

In Stelling 5 word aangetoon dat, gegee 'n kort eksakte ry

$$0 \to {}_RK \to {}_RL \to {}_RM \to 0,$$

dan is $\ell_R(L) \subseteq \ell_R(K) \cap \ell_R(M)$.

Die annuleerder van 'n R-moduul M speel ook 'n belangrike rol wanneer ons belangstel daarin om M om te skakel na 'n $R/_I$*-moduul, waar I 'n tweesydige ideaal van R is, en wel soos volg: M kan beskou word as 'n* $R/_I$*-moduul onder die bewerking* $(r + I)m = rm$ *as en slegs as* $I \subseteq \ell_R(M)$.

Om aan te toon dat 'n ry van R-module

$$0 \to {}_RK \to {}_RL \to {}_RM \to 0$$

eksak is as en slegs as die ry van $R/_I$*-module*

$$0 \to {}_{R/I}K \to {}_{R/I}L \to {}_{R/I}M \to 0$$

eksak is, Stelling 10, is dit nodig om die onderlinge verwantskap tussen die annuleerders van saamgegroepeerde module te beklemtoon. Dieselfde onderlinge verwantskap speel 'n belangrike rol wanneer ons wil aantoon dat 'n kommutatiewe diagram van R-module 'n kommutatiewe diagram van $R/_I$*-module induseer. Dit word gedoen in Stelling 11.*

SUMMARY

Some properties of annihilators of modules

The annihilator of an R-module M, defined by $\ell_R(M) = \{r \in R\ rm = 0,\ m \in M\}$ *is a two-sided ideal of R which can be characterized as being the intersection of all left ideals I of R such that* $R/_I$ *can be embedded into M. Some relationships which exist between the properties of a module and its annihilator are displayed in Proposition 4.*

Given a short exact sequence

$$0 \to {}_RK \to {}_RL \to {}_RM \to 0,$$

it is shown in Proposition 5 that $\ell_R(L) \subseteq \ell_R(K) \cap \ell_R(M)$. *The annihilator of an R-module M also plays an important role when one has an interest in changing M to an* $R/_I$*-module, where I is a two-sided ideal of R, namely: M can be regarded as an* $R/_I$*-module with operation* $(r + I)m = rm$ *if and only if* $I \in \ell_R(M)$. *To show that a sequence of R-modules*

$$0 \to {}_RK \to {}_RL \to {}_RM \to 0$$

is exact if and only if the sequence of $R/_I$*-modules*

$$0 \to {}_{R/I}K \to {}_{R/I}L \to {}_{R/I}M \to 0$$

is exact, Theorem 10, one has to emphasize the above-mentioned interacting relationship existing between the annihilators of the modules in the named sequence. Exactly the same emphasis is placed on this relationship when it is one's intention to show that a commutative diagram of R-modules induces a commutative diagram of $R/_I$*-modules. This is undertaken in Theorem 11.*

Inleiding

In hierdie artikel is alle ringe onder bespreking assosiatief met 'n eenheidselement en alle module is unitale linkermodule. Hoewel die begrip van die annuleerder van 'n moduul goed bekend is, is die onderwerp nogtans nie uitgeput nie. Die doel van hierdie artikel is om 'n oorsig te gee van sommige bekende, sowel as minder bekende eienskappe van annuleerders van module. In die besonder sal aandag gegee word aan die onderlinge verwantskap wat bestaan tussen die annuleerders van saamgegroepeerde module – soos byvoorbeeld in 'n eksakte ry of in 'n kommutatiewe diagram.

Definisie

Laat M 'n R-moduul wees. Vir enige deelversameling $X \subseteq M$ word die linkerannuleerder van X in R gedefinieer deur $\ell_R(X) = \{r \in R\ rx = 0,\ x \in X\}$. In wat volg beteken annuleerder linkerannuleerder.

1. Opmerkings

(1) $\ell_R(X)$ is 'n linkerideaal in R.

(2) As X 'n ondermoduul is van M, dan is $\ell_R(X)$ 'n tweesydige ideaal in R.
(3) Laat R enige ring wees en J(R) sy Jacobson radikaal. Dan is $J(R) \subseteq \bigcap_E \ell_R(E)$ waar E al die eenvoudige R-module deurloop.
(4) $_RM$ heet getrou as $\ell_R(M) = 0$.

2. Stelling (3)

'n R-moduul M is getrou as en slegs as R ingebed kan word in M^A vir een of ander versameling A. □

Die volgende stelling gee 'n karakterisering van die annuleerder, $\ell_R(M)$, van 'n R-moduul M.

3. Stelling

Laat M 'n R-moduul wees. Dan is $\ell_R(M)$ die deursnede van alle linkerideale I van R sodanig dat die R-moduul $R/_I$ ingebed kan word in M.

Bewys

Laat J die klas van alle linkerideale I van R wees sodanig dat $R/_I$ ingebed kan word in M. Kies enige $r \in \ell_R(M)$ en $I \in J$ en identifiseer die elemente van $R/_I$ met hul beelde onder die inbedding $R/_I \to M$. Dan is $r(1 + I) = r + I = I$ waaruit volg dat $\ell_R(M) \subseteq I$ sodat $\ell_R(M) \subseteq \bigcap_{I \in J} I$.

Sê, omgekeerd, dat $m \in M$. Dan induseer die afbeelding $R \to Rm$ gedefinieer deur $r \to rm$, die volgende eksakte ry

$$0 \to \ell_R(m) \to R \to Rm \to 0.$$

Gevolglik is $R/\ell_R(m) \cong Rm$ as R-module sodat $R/\ell_R(m)$ ingebed kan word in M. Dit volg dus dat $\ell_R(m) \in J$. As nou $r \in \bigcap_{I \in J} I$ en $m \in M$, dan is $rm = 0$ want $r \in \ell_R(m)$ sodat inderdaad $\bigcap_{I \in J} I \subseteq \ell_R(M)$. □

Die verwantskap wat bestaan tussen die eienskappe van 'n moduul en sy annuleerder kan, onder andere, deur die volgende stelling geïllustreer word.

4. Stelling

As M 'n eenvoudige R-moduul is, dan is $\ell_R(M)$ 'n maksimale ideaal in R.

Bewys

As M eenvoudig is, dan is dit siklies. Sê $M = {}_R\langle m\rangle$. Beskou die R-epimorfie ϕ: $R \to M$ geïnduseer deur $1 \to m$. Dan is $R/\mathrm{Ker}\,\phi \cong M$. Laat $\mathrm{Ker}\,\phi = L$, dan is R/L eenvoudig en $L = \ell_R(M)$. Maar L is 'n maksimale linkerideaal van R, want as S 'n linkerideaal van R is sodanig dat $L \subset S \subset R$, dan is $0 \neq S/L$ 'n egte ondermoduul van R/L wat strydig is daarmee dat R/L eenvoudig is.

Gevolg 1

Laat R 'n lokale ring wees en M en N eenvoudige R-module. Dan is $\ell_R(M) = \ell_R(N)$.

Gevolg 2

As R 'n kommutatiewe ring is en M 'n eenvoudige R-moduul, dan is $\ell_R(M)$ 'n priemideaal van R.

Bewys

Aangesien M eenvoudig is, is $\ell_R(M)$ maksimaal in R. Maar aangesien R kommutatief is, is elke maksimale ideaal van R 'n priemideaal.

Gevolg 3

As R kommutatief is, dan is 'n R-moduul M eenvoudig as en slegs as $\ell_R(M)$ maksimaal is in R.

Ons ondersoek nou die verwantskap wat bestaan tussen die annuleerders van module in 'n kort eksakte ry. □

5. Stelling

As $0 \to K \xrightarrow{\alpha} L \xrightarrow{\beta} M \to 0$ 'n eksakte ry van R-module is, dan is $\ell_R(M) \subseteq \ell_R(K) \cap \ell_R(M)$.

Bewys

As ons αK met K identifiseer, dan is $K \subseteq L$ sodat $\ell_R(L) \subseteq \ell_R(K)$. Aan die anderkant is daar vir elke $m \in M$ 'n $x \in L$ sodanig dat $\beta x = m$. Laat nou $r \in \ell_R(L)$. Dan is $rm = r(\beta x) = \beta(rx) = 0$ vir elke $m \in M$ sodat ook $\ell_R(L) \subseteq \ell_R(M)$.

Gevolg 1

Laat $\{B_i\}_{i=1}^n$ R-module wees. Dan is

$$\ell_R\left(\bigoplus_{i=1}^n B_i\right) = \bigcap_{i=1}^n \ell_R(B_i).$$

Gevolg 2

As A en B R-module is en $\ell_R(A) = \ell_R(B)$, dan is $\ell_R(A \oplus B) = \ell_R(A) = \ell_R(B)$.

Gevolg 3

As M 'n semi-eenvoudige R-moduul is, dan is $J(R) \subseteq \ell_R(M)$.

Vir 'n vierde gevolg van Stelling 5 benodig ons die volgende:

Definisie

(1) $_RM$ word ko-voortgebring deur $_RU$ as daar 'n versameling A bestaan en 'n eksakte ry $U^{(A)} \to M \to 0$.
(2) $_RM$ word voortgebring deur $_RU$ as daar 'n versameling A bestaan en 'n eksakte ry $0 \to M \to U^A$.

Gevolg 4

As 'n R-moduul M voortgebring of ko-voortgebring word deur 'n R-moduul U, dan is $\ell_R(U) \subseteq \ell_R(M)$. □

Veronderstel nou dat ons 'n eksakte ry of kommutatiewe diagram van R-module gegee is en dat ons belangstel daarin om hierdie module om te skakel na $R/_I$-module, I 'n tweesydige ideaal van R. Dan ontstaan die vraag of die ry van $R/_I$-module en die diagram van $R/_I$-module steeds respektiewelik eksak of kommutatief is onder die geïnduseerde homomorfieë. In hierdie geval speel die onderlinge verwantskap wat bestaan tussen die annuleerders van die module onder bespreking 'n belangrike rol soos blyk uit die volgende opmerkings en stellings.

6. Opmerking

Laat I enige tweesydige ideaal van 'n ring R wees en laat $R' = R/I$. As M 'n R'-moduul is, dan is M ook 'n R-moduul onder die bewerking $rm = (r + I)m$ vir alle $r \in R$, $m \in M$.

7. Stelling

Laat M enige R-moduul wees, $I = \ell_R(M)$ en $R' = R/I$. As N enige R'-moduul is, dan is $\ell_R(M) \subseteq \ell_R(N)$.

Bewys

Volgens Opmerking 6, is N ook 'n R-moduul sodat $\ell_R(N)$ gedefinieer is. Laat $r \in I = \ell_R(M)$. Dan geld vir enige $0 \neq n \in N$ dat $rn \in IN = 0$ want N is 'n R'-moduul. Dit volg dus dat $\ell_R(M) \subseteq \ell_R(N)$. □

In teenstelling met Opmerking 6 het ons

8. Stelling

Laat M 'n R-moduul wees en I 'n tweesydige ideaal van R. Dan is M 'n R/I-moduul onder die bewerking $(r + I)m = rm$ vir alle $r \in R$, $m \in M$ as en slegs as $I \subseteq \ell_R(M)$.

Bewys

Sê $I \subseteq \ell_R(M)$ en laat $\bar{r} = r + I$ en $\bar{s} = s + I$.

As $\bar{r} = \bar{s}$, dan is $\bar{r}m = \bar{s}m$ want $r - s \in I$. Die bewerking $(r + I)m = rm$ is dus eenduidig en dat M 'n R/I-moduul is, volg direk.

Sê, omgekeerd, dat $r \in I$. Dan is $rm = (r + I)m = Im = 0$. Hieruit volg dat $r \in \ell_R(M)$ en gevolglik is $I \subseteq \ell_R(M)$. □

9. Opmerkings

(1) Laat M en N $R' = R/I$-module wees, I 'n tweesydige ideaal van R. Sê $\phi: M \to N$ is 'n R'-homomorfie. Dan is M en N beide R-module en vir ϕ om ook 'n R-homomorfie te wees, is dit voldoende dat $I \subseteq \ell_R(\phi(M))$.

(2) Laat M en N R-module wees en $\phi: M \to N$ 'n R-homomorfie. As $I \subseteq \ell_R(M) \cap \ell_R(N)$, dan is beide R/I-module en ϕ is ook 'n R/I-homomorfie.

Opmerking 9.(1) en 9.(2) kan nou soos volg saamgevat word:

(3) Laat R 'n ring wees, I 'n tweesydige ideaal van R, en M en N R-module sodanig dat $I \subseteq \ell_R(M) \cap \ell_R(N)$. Laat $R' = R/I$, dan is $\mathrm{Hom}_R\,(M, N) = \mathrm{Hom}_{R'}\,(M, N)$.

10. Stelling

Laat L 'n R-moduul wees, $I = \ell_R(L)$ en $R' = R/I$. Dan is die ry

$$0 \to {}_RK \xrightarrow{\alpha} {}_RL \xrightarrow{\beta} {}_RM \to 0$$

eksak as en slegs as die ry

$$0 \to {}_{R'}K \xrightarrow{\alpha} {}_{R'}K \xrightarrow{\beta} {}_{R'}M \to 0$$

eksak is.

Bewys

Laat die ry

$$0 \to {}_RK \xrightarrow{\alpha} {}_RL \xrightarrow{\beta} {}_RM \to 0$$

eksak wees. Volgens Stelling 5 is $\ell_R(L) \subseteq \ell_R(K) \cap \ell_R(M)$ sodat ${}_RK$, ${}_RL$ en ${}_RM$ omgeskakel kan word na $R/\ell_R(L) = R'$-module. Uit Opmerking 9.(2) volg dan dat α en β respektiewelik 'n R'-monomorfie en 'n R'-epimorfie is sodat die volgende ry van R'-module

$$0 \to {}_{R'}K \xrightarrow{\alpha} {}_{R'}L \xrightarrow{\beta} {}_{R'}M \to 0$$

eksak is.

Sê, omgekeerd, dat die ry

$$0 \to {}_{R'}K \xrightarrow{\alpha} {}_{R'}L \xrightarrow{\beta} {}_{R'}M \to 0$$

eksak is. Dan volg dit direk dat K, L en M almal R-module is. Vir α en β om ook R-homomorfieë te wees, moet ons, volgens Opmerking 9.(1) aantoon dat $I = \ell_R(L) \subseteq \ell_R(\alpha K)$ en dat $I \subseteq \ell_R(\beta L)$. Omdat K en M R'-module is, volg dit uit Stelling 7 dat $\ell_R(L) \subseteq \ell_R(K)$ en $\ell_R(L) \subseteq \ell_R(M)$ sodat hierdie voorwaardes inderdaad bevredig word. α en β is gevolglik R-homomofieë sodat die ry

$$0 \to {}_RK \xrightarrow{\alpha} {}_RL \xrightarrow{\beta} {}_RM \to 0$$

eksak is. □

Die laaste stelling handel oor die vraag of 'n kommutatiewe diagram van R-module 'n kommutatiewe diagram van R/I-module induseer. Ook hierin speel die onderlinge verwantskap tussen die annuleerders van die module wat saamgroepeer is in die diagram 'n belangrike rol.

11. Stelling

Laat P 'n R-moduul wees en I 'n tweesydige ideaal van R sodanig dat $I \subseteq \ell_R(P)$ en $R' = R/I$. As ${}_RP$ projektief is, dan is ${}_{R'}P$ projektief.

Bewys

Laat P 'n projektiewe R-moduul wees, I 'n tweesydige ideaal van R wat bevat is in $\ell_R(P)$ en $R' = R/I$. Dan is P 'n R'-moduul onder die bewerking $(r - I)p = rp$. Beskou die volgende diagram van R'-module met eksakte ry en ϕ enige R'-homomorfie:

$$\begin{tikzcd} & {}_{R'}P \arrow[d, "\phi"] & \\ {}_{R'}M \arrow[r, "\beta"] & {}_{R'}N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

In hierdie diagram kan P, M en N beskou word as R-module (Opmerking 6). Volgens Stelling 7 is $I \subseteq \ell_R(N)$ en $I \subseteq \ell_R(M) \subseteq \ell_R(\beta(M))$ sodat uit Opmerking 9.(1) volg dat ϕ en β ook R-homomorfieë is. Maar aangesien P 'n projektiewe R-moduul is, bestaan daar 'n R-homomorfie $\psi: P \to M$ sodanig dat $\beta\psi = \phi$. Maar volgens Opmerking 9.(2) kan ψ ook geïnterpreteer word as 'n R-homomorfie want $I \subseteq \ell_R(M)$. In die oorspronklike diagram van R'-module en R'-homomorfieë bestaan daar dus 'n R'-homomorfie ψ: $P \to M$ sodat die diagram kommuteer. Dit volg dus dat P projektief is as 'n R'-moduul. □

Summary

Let M be a left R-module. Then the left annihilator of M in R is defined by $\ell_R(M) = \{r \in R \mid rm = 0, m \in M\}$.

The aim of this paper is to give a general survey of some properties of annihilators of modules. In particular the relationship which exist between annihilators of modules grouped together – for example, in an exact sequence or in a commutative diagram – are displayed. The following propositions are given and proved:

Proposition: Let M be an R-module. Then $\ell_R(M)$ is the intersection of all left ideals I of R such that the R-module $R/_I$ can be embedded into M.

Proposition: If M is a simple R-module, then $\ell_R(M)$ is a maximal ideal of R.

Proposition: If $0 \to K \xrightarrow{\alpha} L \xrightarrow{\beta} M \to 0$ is an exact sequence of R-modules, then $\ell_R(L) \subseteq \ell_R(K) \cap \ell_R(M)$.

In what follows we need the following:

Remark: Let I be any two-sided ideal of a ring R and let $R' = R/_I$. If M is an R'-module, then M is also an R-module with operation $rm = (r + I)m$ for all $r \in R$, $m \in M$.

Proposition: Let M be any R-module, $I = \ell_R(M)$ and $R' = R/_I$. If N is any R'-module, then $\ell_R(M) \subseteq \ell_R(N)$.

In contrast to the remark above we have the following

Proposition: If M is an R-module and I a two-sided ideal of R, then M is an $R/_I$-module with operation $(r + I)m = rm$ for all $r \in R$, $m \in M$ if and only if $I \subseteq \ell_R(M)$.

The importance of the interacting relationship which exist between the annihilators of modules grouped together is emphasised in the proofs of the following two theorems.

Theorem: Let L be an R-module, $I = \ell_R(L)$ and $R' = R/_I$. Then the sequence of R-modules

$$0 \to {}_RK \xrightarrow{\alpha} {}_RL \xrightarrow{\beta} {}_RM \to 0$$

is exact if and only if the sequence of R'-modules

$$0 \to {}_{R'}K \xrightarrow{\alpha} {}_{R'}L \xrightarrow{\beta} {}_{R'}M \to 0$$

is exact.

Theorem: Let P be an R-module and I a two-sided ideal of R such that $I \subseteq \ell_R(P)$ and $R' = R/_I$. If ${}_RP$ is projective, then ${}_{R'}P$ is projective.

VERWYSINGS

1. ANDERSON, F.W. & FULLER, K.F. (1974). *Rings and Categories of Modules* (Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin).
2. VESTERHUYSE, A. (1978). Module en hul Annuleerders, *Ph.D. proefskrif* (R.A.U.).
3. MORITA, K. (1966). On the S-rings in the sense of F. Dasch, *Nagoya Math. J.*, 27, 687–695.

LITERATUURVERWYSINGS

Die literatuurverwysings is in sommige gevalle nog gedoen volgens die voorskrif van die *Tydskrif vir Natuurwetenskappe*. In toekomstige uitgawes moet die verwysings streng volgens voorskrif van hierdie tydskrif gedoen word.