Navorsings- en Oorsigartikels

'n Oorsig oor statistiese Bayes-beslissingsteorie in die geval van meer as een individu

D.J. de Waal
Departement Wiskundige Statistiek, Universiteit van die Oranje-Vrystaat, Posbus 339, Bloemfontein

UITTREKSEL

'n Oorsig oor statistiese Bayesbeslissingsteorie in die geval van meer as een individu word gegee. Alhoewel verskeie oplossings uitgewys word om konsensus te bereik, is op die Nashoplossing gekonsentreer as 'n baie gunstige kandidaat om in die praktyk te gebruik. Daar is veral aandag gegee aan die neem van die beste beslissing in 'n gewone beslissingsteoriesituasie en dan is daar ook gekyk na die Bayesberaming van 'n binominaalparameter deur meer as een individu.

ABSTRACT

A review on statistical Bayes decision theory in the case of more than one individual

A review on statistical Bayes decision theory in the case of more than one individual is given. Although several solutions are pointed out, special attention is given to the Nash solution as a good candidate to use in practical decision problems. Attention is given to a decision problem where the best decision out of a finite number of decisions has to be taken and there is also an estimation of a binomial parameter by several Bayesians.

1. INLEIDING

Statistiese beslissingsteorie in die geval van meer as een individu is 'n gebied wat nog blootgestel is aan heelwat kritiek. Alhoewel daar heelwat literatuur beskikbaar is oor groepbesluitneming, is die literatuur oor situasies soos deur Savage[11] beskrywe, waar n-Bayesiane 'n wedersyds aanvaarbare oplossing tot 'n statistiese beslissingsprobleem moet gee, nog baie beperk. Weerahandi en Zidek[13] het 'n groot bydrae op hierdie gebied gelewer en veral die Nashoplossing uitgewys as 'n goeie kandidaat vir die bereiking van konsensus. Die Nashoplossing is van die oudste oplossings wat voorgestel is (Zeuthin,[14] Nash[7]) in 'n n-persoonbedingingspel. Verskeie ander oplossings het later gevolg. Aangesien die n-Bayesiaan beslissingsteorie ontwikkel is uit bedingingsteorie, is hierdie oplossings ook van toepassing op die statistiese beslissingsteorie.

Daar is veral drie belangrike aspekte in n-persoonbeslissingsteorie wat nie veel aandag geniet in die eenpersoonbeslissingsteorie nie. Dit is: (i) Die utiliteite van elke persoon moet in ag geneem word. (ii) Gerandomiseerde beslissings moet ingevoer word. Laasgenoemde aspek bestaan wel in die een-persoonbeslissingsteorie, maar die Bayesbeslissing is baie selde 'n gerandomiseerde beslissing. (iii) 'n Derde aspek van belang waar twee of meer persone 'n gesamentlike beslissing moet maak, is waar geen konsensus bereik kan word nie. Die teorie maak voorsiening vir 'n veto deur 'n besluitnemer.

Hierdie navorsing is finansieel ondersteun deur die UOVS en die WNNR.

Indien die voorkeure (utiliteite) van die individue dieselfde is, kan die probleem volgens die teorie vir 'n enkele Bayesiaan opgelos word. Dit is soortgelyk aan 'n geval waar 'n arbiter die voorkeure neem en met behulp van 'n gesamentlike prior- of posteriorverdeling op die parameterruimte die Bayesbeslissing bepaal. Die gesamentlike prior- (posterior-) verdeling het ook reeds heelwat aandag in die literatuur geniet. So is daar die lineêre gesamentlike prior (Stone,[12] Mandansky[6])

$$\pi_{RG} = \alpha_1\pi_1 + \ldots + \alpha_n\pi_n,\ \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1,\ \alpha_i \geq 0$$

waar π_i die digtheid vir individu i aandui, en α_i die relatiewe gewig is wat aan individue se prior (posterior) gegee word. Die bepaling van α_i, $i = 1,\ldots,n$ behoort volgens Madansky gereeld aangepas te word en moet nie vaste waardes aanneem nie.

Weerahandi en Zidek[13] stel 'n geometriese gesamentlike prior (posterior) van die vorm

$$\pi_{GG} = \pi_1^{\alpha_1}\pi_2^{\alpha_2}\ldots\pi_n^{\alpha_n},\ \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1,\ \alpha_i \geq 0$$

voor, wat heelwat voordele bo π_{RG} bied.

Die probleem word veel ingewikkelder indien die individue se voorkeure verskil. Savage[11] het 'n oplossing voorgestel, maar heelwat alternatiewe wat meer aandag geniet, is voorgestel. Dit is dan ook aan hierdie laasgenoemde oplossings dat ons hier aandag gaan gee.

Voordat ons kyk na die oplossings in die geval van twee of meer inividue, kyk ons eers na die tipiese Bayesoplossing by een besluitnemer. Ons sal illustreer aan die hand van die volgende hipotetiese voorbeeld.

Voorbeeld 1

Vissermanne in Knysna kan besluit om in die meer vis te vang (beslissing a_1) of om in die see vis te vang (beslissing a_2). Binne die meer is dit veiliger om te vang, ongeag die weersomstandighede, terwyl die vangste gewoonlik beter in die see is as die weer dit toelaat. Uit ondervinding van weerdata het die vissermanne gesien dat die weer op gemiddeld 200 uit die 365 dae van die jaar as sleg geklassifiseer kan word (staat θ_2 van Natuur), terwyl die res as goed vir visvang (staat θ_1 van Natuur) geklassifiseer kan word. Hieruit het die vissermanne dus die volgende priorwaarskynlikhede op die staatruimte $\Theta = \{\theta_1, \theta_2\}$ van Natuur:

$$\underset{\sim}{g}_1 = [P(\theta_1) = 0{,}5479;\ P(\theta_2) = 0{,}4521].$$

Gestel 'n visserman het, nadat alle winste of verliese op vangste en moontlike skade aan sy bote as gevolg van swak weersomstandighede in die see in ag geneem is, die volgende utiliteite bereken:

TABEL 1
Utiliteite u(a;)

		Natuur	
		θ_1	θ_2
Beslissings	a_1	17,3	11,5
	a_2	20,6	4,4

Dit beteken dus dat hy sy utiliteit op 20,6 bereken indien hy sou besluit om in die see te laat visvang en die weer is daardie dag goed. Sy verwagte utiliteite is

$$u(a_1) = E_\Theta u(a_1,\theta) = 13{,}4859$$
$$u(a_2) = E_\Theta u(a_2,\theta) = 13{,}2760.$$

Aangesien a_1 'n groter verwagte utiliteit oplewer as a_2 en indien hy geen verdere informasie gebruik nie, sal hy op a_1 besluit. Die verdere implikasie is dat tensy sy priorinformasie of utiliteite gaan verander, hy nooit in die see sal laat visvang nie.

Indien hy rasioneel sou optree en van die daaglikse weervoorspelling gebruik sou maak, kan die analise soos volg gedoen word.

Laat X 'n kansveranderlike wees sodanig dat

X =
- A indien voorspelling goeie weer voorspel
- B indien voorspelling redelike weer voorspel
- C indien voorspelling swak weer voorspel
- D indien voorspelling gevaarlike weer voorspel.

Uit ervaring met die voorspellings is daar verder gevind dat goeie weer voorspel kan word, terwyl die weer uiteindelik as sleg (θ_1) geklassifiseer kan word. So is daar die volgende voorwaardelike waarskynlikhede gevind:

$$P(X=A|\theta_1) = 0{,}52;\ P(X=B|\theta_1) = 0{,}41;$$
$$P(X=C|\theta_1) = 0{,}05;\ P(X=D|\theta_1) = 0{,}02$$

$$P(X=A|\theta_2) = 0{,}1;\ P(X=B|\theta_2) = 0{,}17;$$
$$P(X=C|\theta_2) = 0{,}25;\ P(X=D|\theta_2) = 0{,}48.$$

Deur van hierdie informasie gebruik te maak en indien die voorspelling vir die volgende dag as C geklassifiseer word, is die posteriorwaarskynlikhede

$$\underset{\sim}{g}_2 = [P(w_1|X=C) = 0{,}1951;\ P(w_2|X=C) = 0{,}8049].$$

Sy verwagte utiliteite is nou

$$u(a_1) = 12{,}6316$$
$$u(a_2) = 7{,}5606.$$

Die optimale beslissing is dus a_1.

Dienooreenkomstig kan daar bereken word dat die optimale beslissing a_2 is indien die weervoorspelling B sou wees.

2. n-Individue

Sodra die aantal individue by 'n besluitnemingsproses meer as een is en die utiliteite van die individue verskil, is daar 'n paar moontlike prosedures wat gevolg kan word.

Indien die individue oorreed kan word om deur onderhandelinge tot dieselfde utiliteite in te stem, kan die proses van die enkele Bayesiaanbesluitneming, soos in die voorbeeld beskrywe, gevolg word, al het die individue verskillende priors. Die gesamentlike prior π_{GG} kan hier aanbeveel word.

Indien daar egter groot verskille tussen die utiliteite van die individue bestaan, is die bereiking van konsensus heelwat ingewikkelder. Weerahandi en Zidek[13] benader die meervoudige Bayesiaanbeslissingsprobleem as 'n koöperatiewe n-persoon nie nulsom spel met parameterruimte Θ en aksieruimte A nie. Vir die i-de individu uit 'n groep van n-individue, laat π_i die posterior- of priorverdeling aandui, afhangende daarvan of data beskikbaar is of nie en dit aan al die ander individue bekend is. Die ooreenstemmende utiliteitsfunksie is $u_i\,(a,\theta)$, $a \in A$, $\theta \in \Theta$. Die gedied vir u_i sluit in gerandomiseerde beslissings δ. Dus

$$u_i\,(\delta,\theta) = \int u_i\,(a,\theta)\delta(da).$$

Gesamentlike randomisasie is moontlik sodat individue tussen twee beslissings δ_1 en δ_2 gerandomiseerd kan kies, sê deur middel van die opgooi van 'n muntstuk.

Daar word veronderstel dat $\{u_i\}$ begrens is, dat die i-de Bayesiaan se huidige utiliteit c_i is en dat A die beslissing "geen beslissing" as 'n moontlike beslissing insluit. Laat

$$\underline{u}(\delta) = (u_1(\delta),\ldots,u_n(\delta)) \text{ waar } u_i(\delta) = \int u_i(\delta,\theta)\pi_i(d\theta).$$

Verder $S_n = \{[\underline{u}(\delta)-c]_+ : \delta \text{ gerandomiseer}\}$ is 'n kompakte konvekse deelversameling van $[0,\infty]^n$ waar $[\underline{x}]_+ = \text{maks}\{x_1,0\},\ldots,\text{maks}\{x_n,0\}$ vir $\underline{x} = (x_1,\ldots,x_n)$.

Deur die transformasie $u_i \rightarrow u_i - c_i$ word $S_n = \{[\underline{u}(\delta)]_+ : \delta \text{ gerandomiseer}\}$. 'n Meervoudige Bayesiaanbeslissingsreël δ_n, relatief tot S_n kan nou gedefinieer word. Laat B_n die klas van alle kompakte

konvekse $S_n^{\prime s}$ wees, dan is S_n enige reël wat $\underline{u}(\delta_n) = \mu(S_n)$ bevredig en indien μ die Nashoplossing is word die volgende bevredig:
Aksioma 1 (Uitvoerbaarheid)

$\mu(S) \in S$ vir alle $S \in B_n$

Aksioma 2 (Pareto-optimaliteit)
Daar is geen $\underline{u} = (u_1,\ldots,u_n) \in S$ $\underline{u} \neq \mu(S)$ sodanig dat $\mu_i(S) \leq u_i$ vir alle i.

Bogenoemde aksiomas is algemeen aanvaarbare aannames wat bo enige kritiek staan. Die volgende aannames is wel onderhewig aan kritiek en daarom word na hulle as postulate verwys:

Postulaat 1 (Totale invariansie)
Indien $T(\underline{u}) = (a_1u_1,\ldots,a_nu_n)$ vir alle $\underline{u} \in [0,\infty]^n$, $a_i > 0$, $i = 1,\ldots,n$, dan $(T0\mu)(S) = \mu(T(S))$.

Hierdie postulaat het die implikasie dat utiliteite nie onderling vergelykbaar hoef te wees nie en ons sal later sien dat dit nie in die praktyk altyd die gewenste oplossing gee nie.

Postulaat 2 (Simmetrie)
Indien S simmetries is, dit is geslote onder permutasie van die koördinate van die element, dan $\mu_i(S) = \mu_j(S)$ vir alle i en j.

Die postulaat impliseer dus dat die oplossing nie moet onderskei tussen die individue as die utiliteite nie onderskei nie.

Postulaat 3 (Onafhanklikheid van irrelevante alternatiewe)

$\mu(S) = \mu(U)$ indien $S \subset U$ en $\mu(U) \in S$.

Hierdie postulaat kan soos volg geïllustreer word:

Voorbeeld 2

Gestel twee individue wat dieselfde waarde aan 'n rand heg, moet R100 tussen hulle verdeel: dan is die logiese verdeling R50 elk. Die versameling U is $U = \{u_1,u_2: u_1 + u_2 = 100; u_1 \geq 0, u_2 \geq 0\}$. Indien die beperking op individu 2 geplaas word dat hy nie meer as R60 mag ontvang nie, dan is $S = \{u_1,u_2: u_1 + u_2 = 100; u_1 \geq 0, 0 \leq u_2 \leq 60\}$. Ons sien dat $S \subset U$. Verder is die beperking wat op individu 2 geplaas word, irrelevant aangesien die verdeling nog steeds R50 vir elk gaan wees en $\mu(U) = (50,50) \in S$.

Nash[7] toon aan dat die bogenoemde aannames impliseer dat $\mu(S)$ die unieke punt in S is wat die Nashproduk.

$$(2.1) \quad P(\underline{u}) = \prod_{i=1}^{n} [u_i]^{1/n}, \ \underline{u} \in S$$

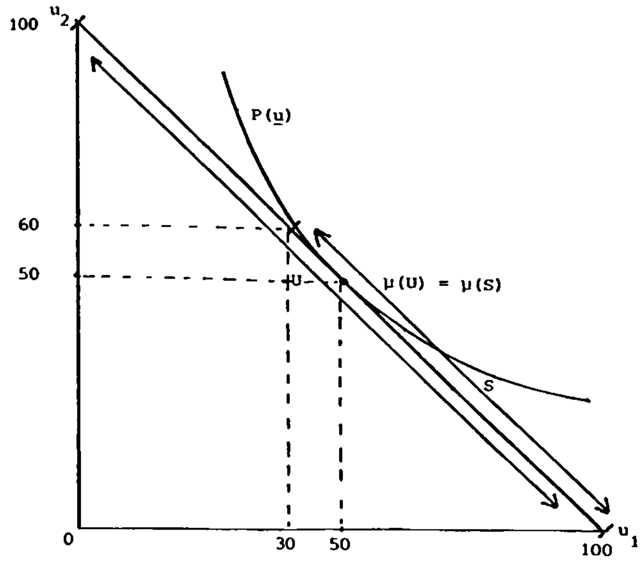
maksimeer.

Figuur 1 illustreer die Nashproduk en die oplossing aan die hand van voorbeeld 2.

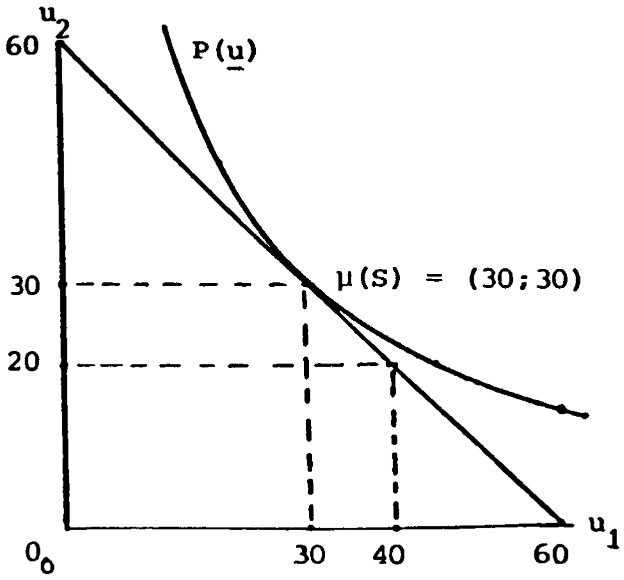
As illustrasie van postulaat 1, beskou die volgende voorbeeld:

Voorbeeld 3

Laat twee individue 60 skyfies verdeel, waar 'n skyfie vir individu 1 R1 werd is, maar R2 vir individu 2.



FIGUUR 1: Versamelings U en S met Nashproduk $P(\underline{u})$ en Nashoplossings $\mu(U) = \mu(S)$.



FIGUUR 2: Versameling S met Nashproduk $P(\underline{u})$ en Nashoplossing $\mu(S)$.

Laat $T(\underline{u})$ die versameling utiliteite in terme van monetêre waardes wees en S in terme van die skyfies. Dan is $a_1 = 1$ en $a_2 = 2$.

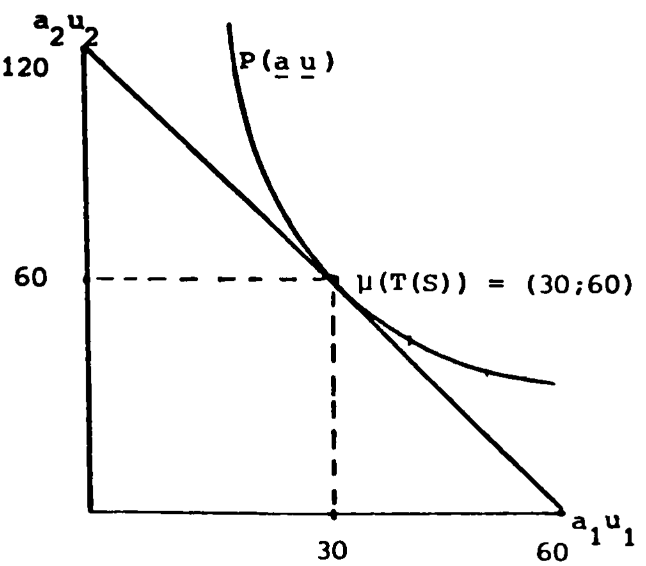
Grafies voorgestel, lyk die Nashproduk en die oplossings soos in Figure 2 en 3:

Dit is duidelik dat $T(\mu(S)) = (30;60)$ en dus $T(\mu(S)) = \mu(T(S))$.

Opmerking:

'n Belangrike teenstrydigheid tussen die werklike oplossing en die Nashoplossing kom hier na vore. In die praktyk gaan die twee individue waarvoor die rand dieselfde waarde het, die skyfies (40;20) verdeel sodat elkeen R40 kry, terwyl die Nashoplossing (30;30) is.

Dit is juis as gevolg van hierdie onvermoë van die



FIGUUR 3: Versameling T met Nashproduk P(a u) en Nashoplossing µ(T(S)).

Nashoplossing dat Kalai[4] postulaat 1 vervang met die volgende postulaat; hy noem dit 'n postulaat van homogeniteit!

Postulaat 1' (Homogeniteit)

$\mu(kS) = k\mu(S)$ vir alle $k > 0$.

Kalai toon aan dat $\mu(S)$ 'n proporsionele oplossing gee, naamlik

$\mu(S) = \text{maks}\{t : t\underline{p} \in S\}.\underline{p}$

waar $\underline{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, $p_i > 0$ vir alle i.

Kalai se gevolgtrekking volg van aksiomas 1 en 2, postulate 2,3,1',3' en die aanname van S is „omvattend", naamlik indien $S_1 \in S$ en $0 < S_2 \leq S_1$, dan is $S_2 \in S$.

Volgens hierdie postulaat is $\underline{p} = (40;20)$ vir die voorbeeld geïllustreer in Figuur 3.

Verskeie outeurs het hulle opinie al uitgespreek oor postulate 1, 2 en 3. Kalai[3] het onder andere postulaat 2 laat verval en toon aan dat die oorblywende aannames impliseer dat $\mu(S)$ die unieke punt in S is wat die nie-simmetriese Nashproduk

$$\prod_{i=1}^{n} [u_i]^{\alpha_i}, \ \underline{u} \in S$$

Maksimeer, waar $\Sigma\alpha_i = 1$ en $\alpha_i \geq 0$ vir alle i. Die bepaling van die α_i's is egter nog 'n ope vraag.

Kalai en Smorodinsky[5] vervang postulaat 3 deur 'n postulaat wat Riddell[10] noem individuele monotonisiteit.

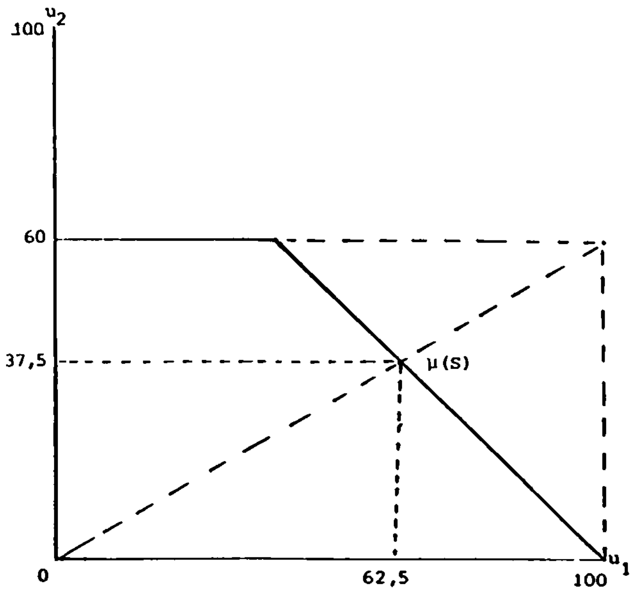
Postulaat 3' (Individuele monotonisiteit)

Indien $S \subset T$ dieselfde punt van nie ooreenstemming, die punt c, deel en $b_i(S) = b_i(T)$, $i \leq n-1$, waar $b_i(A) = \sup\{s_i : S \in A\}$ vir enige $A \subset [c_1,\infty) \times \times \ldots [c_n,\infty 7$ dan $\mu(S) \leq \mu(T)$.

Hulle toon dan aan dat aksiomas 1 en 2 en postulate 1, 2 en 3' impliseer dat $\mu(S)$ die unieke punt op S se noordoostelike grens is wat op die lyn lê wat c met $(b_1(S), \ldots, b_n(S))$ verbind. Hierdie oplossing is die eerste keer deur Raiffa[9] voorgestel.

Hierdie oplossing vir voorbeeld 2 is soos uit Figuur 4 blyk

$\mu(S) = (37{,}5;62{,}5)$.



FIGUUR 4: Die versameling S met Kalai en Smorodinsky se oplossing µ(S) = (37,5;62,5).

Weer eens is die oplossing nie in ooreenstemming met die werklike oplossing wat twee persone in die praktyk sal kies nie. Hierdie oplossing moet gesien word in die lig daarvan dat 60c vir individu 2 werd is wat 100c vir die ander werd is. In die lig hiervan maak hierdie oplossing sin. Kalai en Smorondinsky[5] het postulaat 2' ingevoer om te verseker dat indien individu 1 'n hoër utiliteit ontvang uit die oplossing, speler 2 ook kan aandring op 'n hoër utiliteit. Die volgende voorbeeld illustreer die nadeel van die Nashoplossing en die voordeel van die oplossing wat uniek met behulp van aksiomas 1 en 2 en postulate 1, 2 en 3' verkry word:

Voorbeeld 4

Laat S_1 = konvekse versameling $\{(0;1);(1;0);(\frac{3}{4};\frac{3}{4})\}$
S_2 = konvekse versameling $\{(0;1).(1;0);(1;0{,}7)\}$.

Die Nashoplossing in S_1 is $(\frac{3}{4};\frac{3}{4})$, terwyl in S_2 dit $(1;0{,}7)$ is. Individu 2 se utiliteit het dus verminder van S_1 na S_2. Die Kalai-Smorodinskyoplossing verseker dat individu 2 se utiliteit vermeerder indien van S_1 na S_2 oorgegaan word.

Aangesien al die bogenoemde oplossings uit die nie-simmetriese Nashoplossing (2.1) verkry kan word deur α_i, $i = 1, \ldots, n$ reg te kies, sal ons nou kyk na die bepaling van die oplossing vir 'n gegewe stel α_i's.

3. DIE NIE-SIMMETRIESE NASHOPLOSSING VIR 'N BESLISSINGSPROBLEEM

'n Beslissingsprobleem soos beskrywe in paragraaf 2 word beskou. Indien die state van Natuur θ_j eindig en diskreet is, vereenvoudig die verwagte utiliteit vir die n-de individu indien hy beslissing a_i neem na

$$U_n(a_i) = \sum_j U_n(a_i,\theta_j)\xi_n(\theta_j)$$

waar $\xi_n(\theta_j)$ die prior- (posterior-) waarskynlikheid is dat $\theta = \theta_j$. Ons veronderstel verder dat $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_q\}$, m.a.w. 'n eindige aantal beslissings. a_i is die Bayesbeslissing indien

$$U_n(a_i) = \underset{k}{\text{maks}}\, U_n(a_k).$$

Die Nashreël vir die bereiking van konsensus tussen die n-Bayesiane behels dus die bepaling van $\underline{\delta} = \delta_0$ sê, sodanig dat

$$P(\underline{\delta}_0) = \sup_{\delta}\{P(\underline{\delta});\ \underline{\delta} \text{ gerandomiseer}\}$$

waar

$$P(\delta) = \prod_k \{\underline{\delta}'\underline{u}_k\}^{\alpha_k}$$

$$\underline{u}_k' = (u_k(a_1)u_k(a_2), \ldots, u_k(a_q))$$

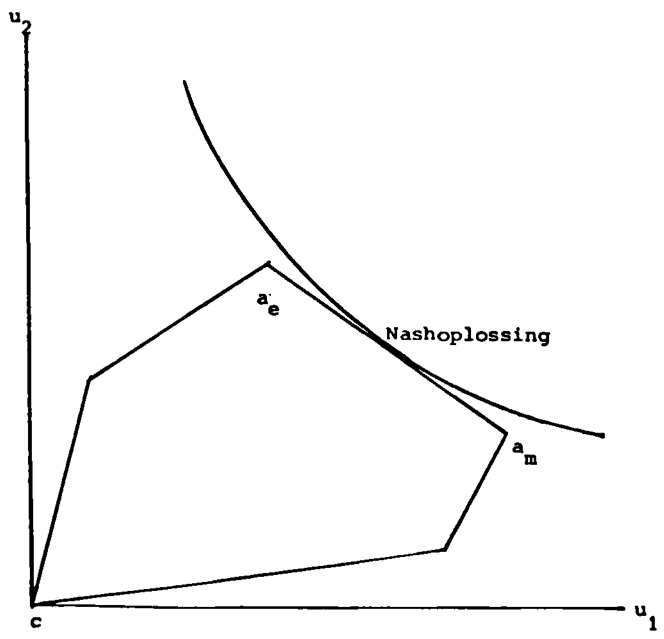
$$\delta_i \geq 0\ ,\ \Sigma_k\delta_k = 1.$$

en

$$\alpha_k^s \geq 0,\ \sum_k \alpha_k = 1 \text{ is bekend.}$$

3.1 Twee individue

Gestel daar is net twee individue. Soos uit Figuur 5 duidelik is, sal die Nashoplossing 'n gerandomiseerde oplossing tussen hoogstens twee pareto optimale beslissings, sê a_e en a_m, wees.



FIGUUR 5: Konvekse versameling van beslissings met 'n gerandomiseerde Nashoplossing.

Laat die utiliteite by a_e en a_m van die twee individue respektiewelik wees

$$\underline{u}' = (u_1(a_e), u_1(a_m)) \text{ en } \underline{u}_2' = (u_2(a_e), u_2(a_m)).$$

Die optimale gerandomiseerde beslissing $\underline{\delta}_0$ volgens die Nashproduk

$$P(\underline{\delta}) = [\underline{\delta}'\underline{u}_1]^{\alpha_1}[\underline{\delta}'\underline{u}_2]^{\alpha_1}$$

bestaan sodanig dat

$$P(\underline{\delta}_0) = \sup_{\underline{\delta}}\{P(\underline{\delta}): \text{gerandomiseer}\}.$$

Laat $\underline{\delta}' = (\delta, 1-\delta)$, dan

$$P(\underline{\delta}) = [\delta u_1(a_e) + (1-\delta)u_1(a_m)]^{\alpha_1}[\delta u_2(a_e) + (1-\delta)u_2(a_m)]^{\alpha_2}.$$

Deur $P(\underline{\delta})$ te maksimeer ten opsigte van $\underline{\delta}$ gee

(3.1)

$$\delta_0 = \frac{\alpha_1 u_2(a_m)\{u_1(a_e) - u_1(a_m)\} + \alpha_2 u_1(a_m)\{u_1(a_e) - u_2(a_m)\}}{\{u_2(a_m) - u_2(a_e)\}\{u_1(a_e) - u_1(a_m)\}}$$

Die optimale reël is dus
Neem beslissing

a_m indien $\delta_0 \leq 0$
a_e indien $\delta_0 \geq 1$.

Randomiseer tussen a_m en a_e in ooreenstemming met die gerandomiseerde reël δ_0 (die wh om a_e te neem) indien $0 < \delta_0 < 1$.

Voorbeeld 5

Veronderstel Margaret en Hennie se dogter gaan trou en hulle wil graag vir haar 'n onthaal reël. Hulle besluit om een van die volgende drie tipes onthale aan te bied:

a_1: Gee die onthaal op die grasperk by hulle huis sonder enige bykomende skuilings vir slegte weer.
a_2: Gee die onthaal op die grasperk by hulle huis met bykomende skuilings vir slegte weer.
a_3: Gee die onthaal in die stadsaal.
a_0: Geen ooreenkoms word bereik nie, met die gevolg geen onthaal word gegee nie.

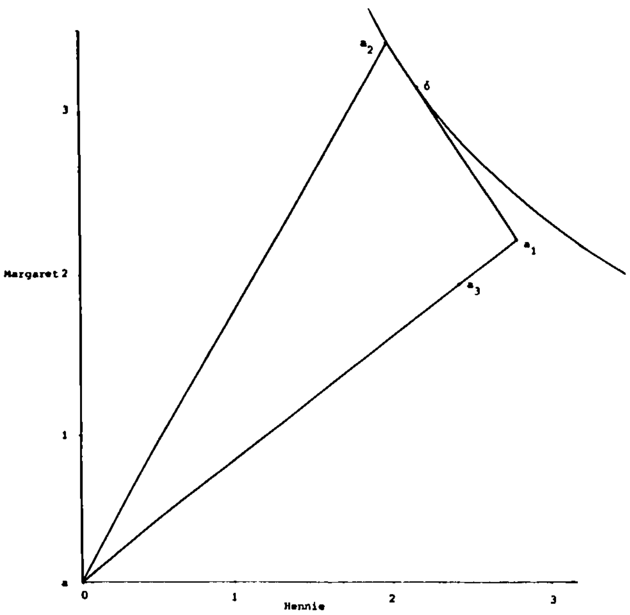
Verskillende state van Natuur nl. $\theta_1, \theta_2, \ldots$, kan beskou word met Hennie en Margaret, hulle eie priorwaarskynlikhede daarop, asook elkeen se eie utiliteite. Gestel dat elkeen sy eie verwagte utiliteite bereken het, die volgende gevind is:

TABEL 2
Verwagte utiliteite

Beslissings	a_0	a_1	a_2	a_3	δ_0
Hennie	0	2,8	2,0	2,4	2,49
Margaret	0	2,2	3,5	1,9	2,70

Dit is duidelik uit tabel 2 dat Hennie se Bayesbeslissing a_1 is, terwyl Margaret se Bayesbeslissing a_2 is. Indien hulle instem op 'n Nashbeslissing met $\alpha_1 = 0,6$ vir Hennie en $\alpha_2 = 0,4$ vir Margaret, dan is dit duidelik uit Figuur 6 dat hulle moet randomiseer tusen die twee pareto-optimale beslissings a_1 and a_2.

Deur die verwagte utiliteite vir a_1 en a_2 en (3.1) te vervang, verkry ons $\delta_0 = 0,615$. Dit beteken dat hulle a_1 met 'n waarskynlikheid 0,615 sal neem en a_2 met 'n waarskynlikheid 0,385. Die Nashproduk is $P(\delta_0) = 2,573$ en die verwagte utiliteite vir beslissing δ_0 word in tabel 2 aangedui.



FIGUUR 6: Konvekse versameling van Hennie en Margaret se beslissings met die gerandomiseerde Nashbeslissing δ.

Opmerking

In die geval van meer as twee pareto optimale beslissings kan die oplossings (3.1) nog steeds gebruik word deur die beslissings paarsgewys te neem. Daar bestaan 'n unieke δ_0 en dit is ook die raakpunt van die tangenslyn aan die Nashproduk deur twee pareto optimale beslissings wat die maksimum Nash gee.

3.2 Drie individue

In die geval van drie individue is die prosedure om die Nashoplossing $\underline{\delta}_0$ te vind sodanig dat

$$P(\underline{\delta}_0) = \sup_{\underline{\delta}}\{P(\underline{\delta}): \underline{\delta} \text{ gerandomiseer}\}$$

waar

$$P(\underline{\delta}) = [\underline{\delta}'\underline{u}_1]^{\alpha_1}[\underline{\delta}'\underline{u}_2]^{\alpha_2}[\underline{\delta}'\underline{u}_3]^{\alpha_3}, \alpha_i \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1.$$

Die verwagte utiliteite $\underline{u}_1$, $\underline{u}_2$, $\underline{u}_3$ vir die drie individue wat ooreenstem met beslissings $a_1, a_2, \ldots, \in A$ stel punte in 'n driedimensionele ruimte voor, en dit is duidelik dat die Nashoplossing die raakpunt van die raakvlak deur drie pareto optimale beslissings aan die Nashproduk is.

Laat a_e, a_m, a_q drie pareto optimale beslissings wees en laat

$$\underline{u}_1 = \begin{bmatrix} u_1(a_e) \\ u_1(a_m) \\ u_1(a_q) \end{bmatrix}, \underline{u}_2 = \begin{bmatrix} u_2(a_e) \\ u_2(a_m) \\ u_2(a_q) \end{bmatrix}, \underline{u}_3 = \begin{bmatrix} u_3(a_e) \\ u_3(a_m) \\ u_3(a_q) \end{bmatrix}$$

die verwagte utiliteite vir die drie individue ten opsigte van die drie beslissings wees.

Laat $\underline{\delta}' = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)$, $\delta_i \geq 0$, $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 1$ die gerandomiseerde beslissing wees. Ons wil $\underline{\delta}$(of δ_1 en δ_2) vind sodanig dat

$$P(\delta_1, \delta_2) = \prod_{i=1}^{3} (\delta_1 x_i + \delta_2 y_i + z_i)^{\alpha_i}$$

'n maksimum is

waar
$$x_i = u_i(a_e) - u_i(a_q)$$
$$y_i = u_i(a_m) - u_i(a_q)$$
$$z_i = u_i(a_q).$$

Dit is 'n nie-lineêre programmeringsprobleem met beperkings $\delta_1 \geq 0$, $\delta_2 \geq 0$ en $\delta_1 + \delta_2 \leq 1$. Die probleem om die drie beslissings a_e, a_m, a_q te vind wat die maksimum Nashproduk sal gee, kan opgelos word deur die maksimum Nashoplossing vir alle kombinasies van drie uit die totale pareto optimale beslissings te neem.

Voorbeeld 6

Veronderstel 3 individue en 5 beslissings a_0, a_1, a_2, a_3 en a_4 (a_0 is die geenooreenkomsbeslissing) met die volgende verwagte utiliteite:

TABEL 3
Verwagte utiliteite

Beslissings		a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
	1	0	2	3	0	2
Individu	2	0	0	3	2	2
	3	0	3	0	3	1

Laat $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{3}$, dan is die optimale reël

$$\underline{\delta}_0' = [0,25 \;\; 0,5 \;\; 0,25]$$

tussen a_1, a_2 en a_3. Die Nashproduk is

$$P(\underline{\delta}_0) = 1,8172.$$

In tabel 4 is vervat die Nashprodukte vir al die ander kombinasies van drie beslissings uit a_1, a_2, a_3 en a_4, aangesien a_1 ook pareto optimaal is.

TABEL 4
Gerandomiseerde beslissings en Nashprodukte

Beslissings	$\underline{\delta}$	**P($\hat{\underline{\delta}}$)**
a_1, a_2, a_3	$[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}]$	1,8172
a_1, a_2, a_4	[0,4514 0,5486 0]	1,7842
a_1, a_3, a_4	$[\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}]$	1,6666
a_2, a_3, a_4	[0,5486 0,4574 0]	1,7842

Dit is duidelik uit die tabel dat $\underline{\delta}' = [\frac{1}{4} \; \frac{1}{2} \; \frac{1}{4}]$ die optimale gerandomiseerde beslissing tussen a_1, a_2 en a_3 is.

Die uitbreiding na die geval van n-individue is nou voor-die-hand-liggend.

3.3 n-Individue

Die prosedure vir die bepaling van die optimum beslissing tussen n-individue uit 'n eindige aantal beslissings q, is om die maksimum Nashproduk vir elke kombinasie van n-beslissings uit q indien $n < q$ te bepaal. Indien $n \geq q$, word q-beslissings sondermeer geneem en die maksimum Nash word bepaal.

Voorbeeld 7

Gestel 5 individue moet uit die drie beslissings a_1,a_2 en a_3 kies met a_0 die 'geen-aksie'-beslissing. Laat die verwagte utiliteite gegee word soos in tabel 5.

TABEL 5
Verwagte utiliteite

Beslissings		a_0	a_1	a_2	a_3
	1	0	2	0	3
	2	0	0	3	2
Individu	3	0	3	2	1
	4	0	1	2	2
	5	0	2	1	0

Die optimale beslissing is $\underline{\delta}' = [0{,}4170\ 0{,}3509\ 0{,}2321]$ tussen a_1,a_2 en a_3 met $P(\underline{\delta}) = 1{,}5692$ vir $\alpha_i = \frac{1}{5}$, $i = 1,2,\ldots,5$. Indien $\alpha_1 = 0{,}2; \alpha_2 = 0{,}3; \alpha_3 = 0{,}2; \alpha_4 = 0{,}1$ en $\alpha_5 = 0{,}2$ dan is $\underline{\delta}' = [0{,}3376\ 0{,}4376\ 0{,}2248]$ en $P(\underline{\delta}) = 1{,}5711$.

3.4 Die prosedure vir die bepaling van die Nashreël

Die prosedure wat gebruik is om die raakpunt van die raakvlak aan die Nashproduk te bepaal, is om $\underline{\delta}$ op te los uit die stel vergelykings:

$$\frac{\partial P(\underline{\delta})}{\partial \delta_j} = P(\underline{\delta}) \sum_i (\alpha_i x_{ij}/\underline{\delta}^{*\prime}\underline{x}_i) = 0,\ j = i,\ldots,q-1$$

waar

$$\underline{\delta}^{*\prime} = (\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_{q-1}1)$$
$$\underline{x}_i' = (u_{i1} - u_{iq}, u_{i2} - u_{iq},\ldots,u_{i,q-1} - u_{iq}, u_{iq}).$$

Die algoritme wat gebruik is om δ_j, $j = 1,\ldots,q$ op te los, in dié van Powel.[8]

3.5 Ander reëls

Die ander oplossings vir die bepaling van konsensus soos deur Kalai[4] en Kalai en Smorodinsky[5] voorgestel, is nie vir voorbeelde 4, 5 en 6 geïllustreer nie, maar die toepassings is voor-die-hand-liggend. Vir toepassings sien Garish.[2] Dit is nog 'n interessante probleem om na die bepaling van die α's in die niesimmetriese Nashreël te kyk wat die verskillende oplossings sal gee.

4. BERAMING VAN PARAMETERS MET BEHULP VAN DIE NASHREËL

4.1 Binomiaalpopulasie

Indien verskeie individue 'n Bayesberaming moet maak van 'n binomiaalparameter, kan die Nashproduk ook gebruik word om 'n beramer te lewer wat konsensus kan gee. Ons sal die prosedure illustreer aan die hand van die volgende voorbeeld:

Voorbeeld 8

Gestel die bestuur van 'n fabriek wat koeëllaers vervaardig, wil vasstel wat die proporsie defektiewe laers is wat per uur vervaardig word. Hulle maak gebruik van twee inspekteurs wat elkeen self 'n beraming van die proporsie $\theta \in \Theta = \{\theta\colon 0 \leq \Theta \leq 1\}$ moet maak. Om die probleem eenvoudig te hou, veronderstel ons dat die inspekteurs die volgende prior-(of posterior-) verdelings gebruik het:

TABEL 6
Prior- (Posterior-) verdelings van die twee inspekteurs

θ	0,0	0,1	0,2	0,3
$P_1(\theta)$	0,2	0,5	0,2	0,1
$P_2(\theta)$	0,0	0,0	0,4	0,6

Indien beide inspekteurs van die kwadratiese utiliteitsfunksie

$$u(\hat\theta;\theta) = 1 - (\hat\theta - \theta)^2$$

gebruik moet maak, waar $\hat\theta$ die beramer is, is hulle verwagte utiliteite respektiewelik

$$u_1(\hat\theta) = E_\theta u(\hat\theta;\theta)$$
$$= -\hat\theta^2 + 0{,}24\hat\theta + 0{,}978$$

en $u_2(\hat\theta) = -\hat\theta^2 + 0{,}52\hat\theta + 0{,}93$.

Die optimale Bayesberamer is dus

$\hat\theta_1 = 0{,}12$ en $\hat\theta_2 = 0{,}26$ respektiewelik.

Hieruit blyk dit dat die een inspekteur 12% defektiewes beraam, terwyl die ander een 26% defektiewes beraam. Dit is 'n groot verskil en indien die bestuur geen rede het om die een inspekteur se beramer bo die ander se beramer te plaas nie en hulle maak gebruik van die Nashoplossing vir 'n gesamentlike beramer, dan beteken dit $\hat\theta$ word bepaal sodanig dat

$$N(\hat\theta) = [u_1(\hat\theta)]^{\frac{1}{2}}[u_2(\hat\theta)]^{\frac{1}{2}}$$

'n maksimum is.

Dit is

$$N^2(\hat\theta) = (-\hat\theta^2 + 0{,}24\hat\theta + 0{,}978)(-\hat\theta^2 + 0{,}52\hat\theta + 0{,}93)$$

'n maksimum.

Dit is $\hat\theta = 0{,}1898$.

Die grafiese voorstelling van die versameling

$$S = \{u_1(\hat\theta);\ u_2(\hat\theta);\ 0 \leq \hat\theta \leq 1\}$$

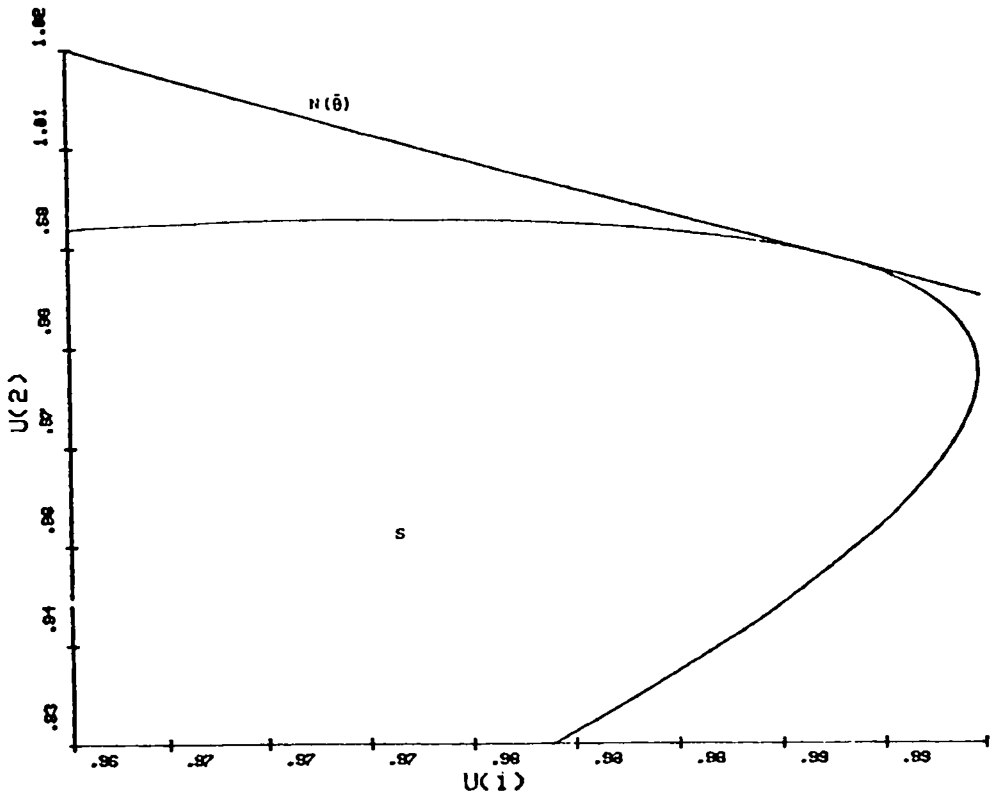
en die Nashproduk $N(\hat\theta)$ word in Figuur 7 gegee.

Indien egter van 'n absolute utilitietsfunksie

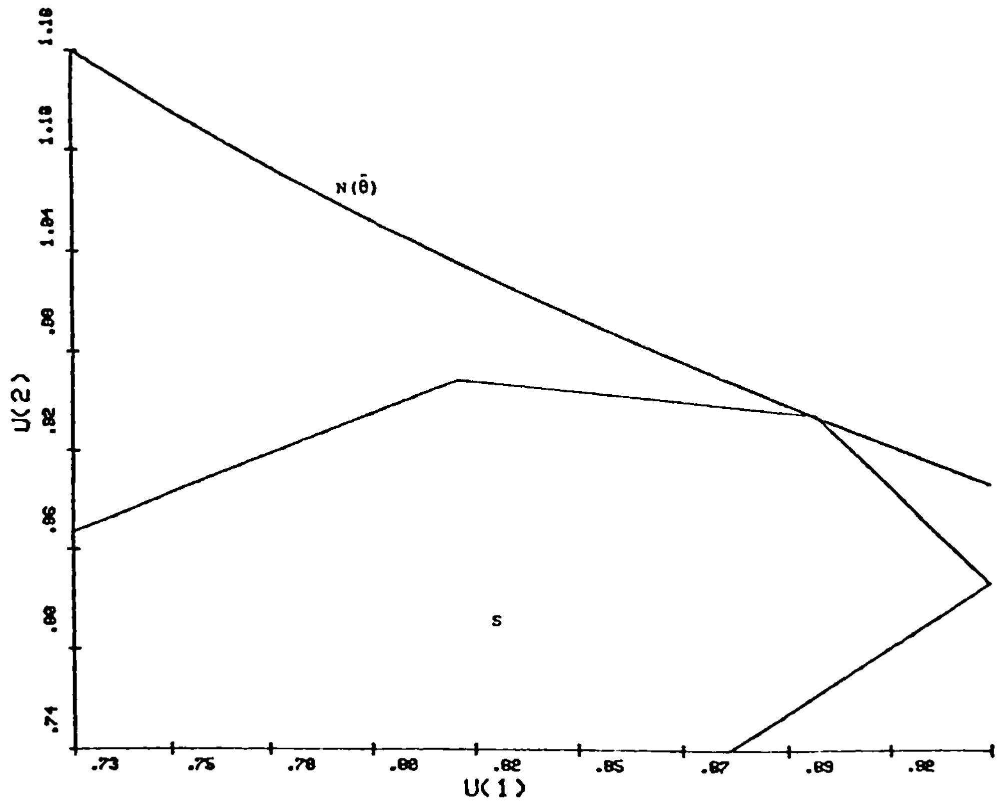
$$u(\hat\theta;\theta) = 1 - |\hat\theta - \theta|$$

gebruik gemaak word, is die verwagte utiliteite

$$u_1(\hat\theta) = \begin{cases} \hat\theta + 0{,}88 & \hat\theta \leq 0 \\ 0{,}6\hat\theta + 0{,}88 & 0 < \hat\theta \leq 0{,}1 \\ -0{,}4\hat\theta + 0{,}98 & 0{,}1 < \hat\theta \leq 0{,}2 \\ -0{,}8\hat\theta + 1{,}06 & 0{,}2 < \hat\theta \leq 0{,}3 \\ -\hat\theta + 1{,}12 & \hat\theta > 0{,}3 \end{cases}$$



FIGUUR 7: Versameling S van verwagte utiliteite vir die twee inspekteurs onder 'n kwadratiese utiliteitsfunksie met die Nashproduk N(θ).



FIGUUR 8: Versameling S van verwagte utiliteite vir die twee inspekteurs onder 'n absolute verskil in utiliteitsfunksie met die Nashproduk N(θ̂).

$$\text{en } u_2(\hat\theta) = \begin{cases} \hat\theta + 0{,}74 & \hat\theta \leq 0{,}2 \\ 0{,}2\hat\theta + 0{,}9 & 0{,}2 < \hat\theta \leq 0{,}3 \\ -\hat\theta + 1{,}26 & \hat\theta > 0{,}3 \end{cases}$$

respektiewelik.

Die twee inspekteurs se respektiewelike beramers is $\theta_1 = 0{,}1$ en $\theta_2 = 0{,}3$.

Die Nashoplossing soos uit Figuur 8 blyk, is $\hat\theta = 0{,}2$.

Die vraag ontstaan of, by 'n kwadratiese of absolute utiliteitsfunsie, die versameling S altyd konveks sal wees (soos byvoorbeeld in Figuur 7 en 8). In die geval van die kwadratiese funksie en 'n binomiaalparameter met twee individue, kan dit soos volg aangetoon word:

Die algemene verwagte utiliteite het die vorm

$$u_1(\hat\theta) = -a_1\hat\theta^2 + b_1\hat\theta + c_1\ ,\ a_1 > 0\ ,\ b_1 > 0$$
$$u_2(\hat\theta) = -a_2\hat\theta^2 + b_2\hat\theta + c_2\ ,\ a_2 > 0\ ,\ b_2 > 0$$

Dus

$$g(\hat\theta) = \frac{\partial u_2(\hat\theta)}{\partial u_1(\hat\theta)} = \frac{(-\hat\theta + \frac{b_2}{2a_2})\,2a_2}{(-\hat\theta + \frac{b_1}{2a_1})\,2a_1}$$

Laat sonder verlies in veralgemening

$$\frac{b_1}{2a_1} < \frac{b_2}{2a_2}$$

waar dit die twee persone se beramers is, dan

$$g(\hat\theta) \begin{cases} > 0 \text{ indien } \hat\theta < \frac{b_1}{2a_1} \\ < 0 \text{ indien } \frac{b_1}{2a_1} < \hat\theta < \frac{b_2}{2a_2} \\ > 0 \text{ indien } \hat\theta > \frac{b_2}{2a_2} \end{cases}$$

Aangesien $\frac{b_1}{2a_1}$ en $\frac{b_2}{2a_2}$ die maksimum waardes vir $u_1(\hat\theta)$ en $u_2(\hat\theta)$ respektiewelik is, volg uit $g(\hat\theta)$ dat die versameling S konveks is. Die pareto optimale versameling is $\frac{b_1}{2a_1} < \hat\theta < \frac{b_2}{2a_2}$.

In die algemene geval van n-individue is die beramer vir 'n kwadratiese utiliteitsfunksie met verwagte utiliteit vir die i-de individu

$$u_i(\hat\theta) = -a_i\hat\theta^2 + b_i\hat\theta + c_i\ ,\ a_i > 0\ ;\ i = 1,\ldots,N,$$

die oplossing uit

$$u(\hat\theta) = \frac{\partial \ell n\, N^N(\hat\theta)}{\partial \hat\theta} = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{-2a_i\hat\theta + b_i}{-a_i\hat\theta^2 + b_i\hat\theta + c_i}\right] = 0.$$

4.2 Normaalpopulasie

In die geval van die beraming van θ in 'n $N(\theta;\Sigma)$ meerveranderlike normaalpopulasie, het Weerahandi en Zidek[13] die bepaling daarvan beskou. Dit is verder ondersoek deur De Waal et al[1] en 'n oplossing is gegee in die geval van twee individue. Die verskil in die beraming van die vorige binomiaalparameter en die gemiddelde van die normaalverdeling is dat 'n eksponensiële funksie van die kwadratiese utiliteitsfunksie beskou word, en dit het die gevolg dat gerandomiseerde beramers gevind kan word. Die versameling S van utiliteite is nie noodwendig konveks nie. Die geval van meer as twee individue is nog nie opgelos nie.

VERWYSINGS

1. De Waal, D.J., Groenewald, P.C.N., Van Zyl, J.M. & Zidek, J.V. (1981). A randomized solution for multi-Bayes estimates of the multinormal mean, *Tegniese verslag nr. 69*, Departement Wiskundige Statistiek, UOVS.
2. Garisch, I. (1982). Various solutions in multiple Bayesian's decision and multinormal estimation problems, *Tegniese verslag nr. 78*, Departement Wiskundige Statistiek, UOVS.
3. Kalai, E. (1977a). Nonsymmetric Nash solutions and replications of 2-person bargaining, *Int. J. Game Theory*, 6, 129-133.
4. Kalai, E. (1977b). Proportional solutions to bargaining situations: Interpersonal utility comparisons, *Econometrica*, 45, 1623-1630.
5. Kalai, E. en Smorodinsky, M. (1975). Other solutions to Nash's bargaining problem. *Econometrica*, 43, 513-518.
6. Madansky, A. (1978). Externally Bayesian groups, Ongepubliseerde manuskrip. Universiteit van Chicago.
7. Nash, J.F., Jr. (1980). The bargaining problem, *Econometrica*, 18, 155-162.
8. Powell, M.J.D. (1970). A Fortran subroutine for solving systems of nonlinear algebraic equations, Rabinowitz, P. red. *Numerical methods for nonlinear algebraic equations*, 150-159.
9. Raiffa, H. (1953). Arbitration schemes for generalized two person games. In *Annals of Mathematical Studies*, M.W. Kuhn and A.W. Tucker eds. Vol. 28, (Princeton, Princeton University Press).
10. Riddel, W.C. (1978). Bargaining under uncertainty, *Res. paper No. 78-15*, Department of Economics, University of Alberta.
11. Savage, L.J. (1954). *The foundations of Statistics* (New York, Wiley).
12. Stone, M. (1961). The opinion pool, *Ann. Math. Statist.*, 32, 1339-1342.
13. Weerahandi, S. en Zidek, J.V. (1978). Pooling prior distributions, *Tegniese verslag 78-34*, Instituut van Toegepaste Wiskunde en Statistiek, Universiteit van British Columbia.
14. Zeuthin, F. (1930). Du monopole bilateral, Révue d'Economie Politique, XLVII, 1651-1670.