5. Ellison, L.N. (1968). Sexing and ageing Alaskan spruce grouse by plumage, *J. Wildl. Mgmt.*, 32, 12-16.
6. Taber, D.T. (1969). Criteria of sex and age. In Giles, R.H. (red.), *Wildlife management techniques*, pp. 325-402. (Wild. Soc., Washington D.C.).
7. Labisky, R.F. & Mann, S.H. (1962). Backtag markers for pheasants, *J. Wildl. Mgmt.*, 26, 393-399.
8. Mentis, M.T. (1973). *A comparative ecological study of greywing and redwing francolins in the Natal Drakensberg* (M.Sc.-verhandeling, U.S.).
9. Hewson, R. (1973). The moults of captive Scottish ptarmigan (*Lagopus mutus*), *J. Zool. Lond.*, 171, 177-187.
10. Rosene, W. (1969). *The bobwhite quail. Its life and management* (Rutgers Univ. Press, New Jersey).
11. Spearman, R.I.C. (1971). Integumentary system. In Bell, D.J. & Freeman, B.M. (reds.), *Physiology and biochemistry of the domestic fowl* (Academic Press, Londen).
12. Dasmann, R.F. & Mossman, A.S. (1962). Road strip counts for estimating numbers of African ungulates, *J. Wildl. Mgmt.*, 26, 101-104.
13. McLachlan, G.R. & Liversidge, R. (1978). *Roberts birds of South Africa* (Struik, Kaapstad).
14. Clancey, P.A. (1967). *Gamebirds of Southern Africa* (Purnell, Kaapstad).

Nie-lineêre funksionaalanalise

W.L. Fouché

Departement Wiskunde, Universiteit van die Oranje-Vrystaat, Bloemfontein

UITTREKSEL

Die artikel bestaan uit 'n bespreking van sommige aspekte van die nie-lineêre funksionaalanalise. Dit sluit in 'n oorsig van Banach se samestrekkingsstelling, Schauder se dekpuntstelling, die globaliseringsprobleem en toepassing van homotopieteorie op nie-lineêre funksionaalanalise. Die beginsels word geïllustreer aan die hand van voorbeelde. Die skrywer beklemtoon dat fundamentele nuwe idees ontwikkel moet word om nie-lineêre verskynsels wat ook van 'n wesenlike oneindig dimensionale aard is, te begryp.

ABSTRACT

In this article we discuss some aspects of nonlinear functional analysis. It included reviews of Banach's contraction theorem, Schauder's fixed point theorem, globalising techniques and applications of homotopy theory to nonlinear functional analysis. The author emphasises that fundamentally new ideas are required in order to achieve a better understanding of phenomena which contain both nonlinear and definite infinite dimensional features.

Hierdie artikel is 'n greep uit die nie-lineêre funksionaalanalise. Enkele van die fundamentele idees op die gebied word uiteengesit, waarna aangetoon word in welke mate die idees 'n bydrae lewer tot die begrip van die kompleksiteit en verskeidenheid van nie-lineêre verskynsels. Dit is dus nie 'n historiese oorsig van die vakgebied nie. Die uiteensetting is eerder daarop gemik om die leser enkele van die prosesse op die gebied te laat ervaar.

Funksionaalanalise het grootliks ontstaan uit die studie van lineêre vergelykings in 'n oneindige aantal veranderlikes. Lineêre algebra oor eindig-dimensionale vektorruimtes is uitgebrei na vektorruimtes van 'n oneindige dimensie. Die resultaat is 'n elegante teorie wat gepaard gaan met diep insigte aangaande verskynsels wat uit die bestaan van 'n oneindige aantal lineêre onafhanklike vektore volg. Die lineêre aspekte van funksionaalanalise is nog nie naastenby uitgeput nie en daar is baie terreine wat ontgin moet word.

Nie-lineêre funksionaalanalise bestudeer óók vergelykings in 'n oneindige aantal veranderlikes, maar hier tree beide nie-lineariteit en oneindigheid van dimensie op die voorgrond. Formeel kom dit neer op die studie van kontinue afbeeldings tussen Banach-ruimtes. Differentiasie (Fréchet-afgeleides) lewer skerp resultate wat meestal van 'n lokale aard is.

Tegniese uit die homotopieteorie stel 'n mens in staat om globale afleidings te maak. Die program is suksesvol slegs indien beperkings geplaas word op die klas kontinue funksies. Die funksies moet "kompak" of minstens kompakte verstuurings van lineêre operatore wees. Die probleme wat ondervind word indien globaliseringstegniese op algemene kontinue funksies toegepas word, is van 'n intrinsieke aard; byvoorbeeld, in 'n Hilbertruimte is die homotopie-invariante op die eenheidsfeer almal triviaal (sien paragraaf 5). Dit toon aan dat nuwe idees vereis word om probleme wat nie-lineêr is en waarin oneindigheid van dimensie swaar gewig dra, te hanteer.

Kompakte funksies dek egter 'n wye klas van probleme in die analise,¹⁰ meetkunde,³ fisika,^{2, 11} ingenieurswese⁸ en ander gebiede, en die teorieë wat ontwikkel is vir die klas van funksies het gelei tot die suksesvolle hantering van diepliggende probleme wat voorheen heeltemal buite bereik van die teorie was. Die wetenskap lei tot 'n magdom van nie-lineêre probleme – ons leef in 'n nie-lineêre wêreld – en gevolglik is daar tans 'n opwindende ontwikkeling van nie-lineêre funksionaalanalise binne die raamwerk van die wetenskap en die tegnologie. Dit is die oortuiging van die skrywer dat die belangrikste ontwikkelings in nie-lineêre funksionaalanalise juis vanuit dié wisselwerking sal groei.

1. Definisies

- 1.1 Laat D 'n deelversameling van die Banachruimte B wees en gestel f is 'n afbeelding wat D afbeeld in die Banachruimte C . Dan word f *kompak* genoem indien f kontinu is en elke begrensde versameling in D afbeeld in 'n relatief kompakte deelversameling van C .
- 1.2 Laat $K : [0, 1] \times [0, 1] \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ 'n kontinue funksie wees. Beskou die Banachruimte $C[0, 1] = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}, f \text{ kontinu}\}$, met norm $\|f\| = \sup_{[0, 1]} |f(x)|$. Die afbeelding K gedefinieer deur $K(x) = \int_0^1 k(x, y, f(y)) dy$, $f \in C[0, 1]$, $x \in [0, 1]$ word 'n *Urysohn-integraaloperator* genoem. Dit kan maklik uit die Arzelà-Ascolstelling afgelei word dat K 'n kompakte operator is. Ons sal dikwels van dié operator gebruik maak om beginsels te illustreer.
- 1.3 Gestel F is 'n operator wat 'n oop deelversameling D in die Banachruimte B in die Banachruimte C afbeeld. Dan is F *Fréchet-differensieerbaar* in die punt $g \in D$ mits 'n begrensde lineêre operator $L : B \rightarrow C$ bestaan só dat

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \|F(g+h) - Fg - Lh\| / \|h\| = 0.$$

Die operator L word die *Fréchet-afgeleide* van F in die punt g genoem en aangedui deur $F'(g)$.

- 1.4 Indien k die kernfunksie van die Urysohn-integraaloperator K is en $k_z(x, y, z) = \partial/\partial z(k(x, y, z))$ bestaan en kontinu is op $[0, 1] \times [0, 1] \times \mathcal{C}$, dan volg dit maklik uit die definisie van die Fréchet-afgeleide dat K oral differensieerbaar is met afgeleide $K'(g)$ gedefinieer deur $K'(g)h(x) = \int_0^1 k_z(x, y, g(y))h(y)dy$, $h \in C[0, 1]$.
- 1.5 Indien 'n operator F oral op D 'n Fréchet-afgeleide besit en die afbeelding $F' : D \rightarrow L(B, C)$ gegee deur $g \rightarrow F'(g)$ kontinu is, dan word F 'n C^1 -operator genoem. (Hier is $L(B, C)$ die Banachruimte bestaande uit alle begrensde lineêre operatore wat B in C afbeeld en met topologie geïnduseer deur die operatornorm).
- Dit kan maklik aangetoon word dat die operator in (1.4) 'n C^1 -afbeelding is.
- (Vir besonderhede aangaande die Urysohn-integraaloperator kan die leser Zabreyko²⁰ raadpleeg).

2. Sametrekking

Gewone interasie het gelei tot die eerste belangrike stelling in die nie-lineêre funksionaalanalise. Gestel D is 'n geslote deelversameling van 'n Banachruimte en A 'n kontinue afbeelding wat D in homself afbeeld. Beskou die vergelyking

$$(1) \quad Af = f, f \in D.$$

Kies f_0 willekeurig in D en definieer die ry $(f_n) \subset D$ iteratief deur herhaalde substitusie; ons definieer dus $f_n = Af_{n-1}$, $n \geq 1$. Dit is duidelik dat indien die ry (f_n) sou konvergeer dan moet $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ 'n oplossing van (1) wees. Die sametrekkingstelling van Banach (1920) beweer dat indien

$$(2) \quad \|Af - Ag\| < q \|f - g\|, f, g \in D$$

met $0 \leq q < 1$, dan sal die ry (f_n) konvergeer en die limiet f die eenduidige oplossing van (1) wees. Die konstante q word 'n *sametrekkingkonstante* genoem.

Die sametrekkingstelling kan beskou word as 'n formalisering van 'n klassieke tegniek in die analise. Die bestaanstelling (Picard) van gewone differensiaalvergelings is 'n belangrike voorbeeld van die gebruik van hierdie beginsel.

Die metode leen hom tot baie variasies veral vanweë die vryheid wat dit bied ten opsigte van die keuse van die gebied D waarin 'n dekpunt gesoek word. 'n Nuttige verwysing vir die omvang sowel as die beperkings van die stelling is Holtzman.⁸

3. Schauder se dekpuntstelling

Ons uitgangspunt is die volgende bekende stelling van Brouwer:

Gestel D is 'n begrensde, geslote en konvekse deelversameling van 'n genormeerde eindig dimensionale vektorruimte. Indien A 'n kontinue afbeelding op D is sodanig dat $A(D) \subset D$, dan besit A 'n dekpunt in D .

Die volgende voorbeeld van Kakutani toon aan dat die stelling nie na oneindig dimensionale vektorruimtes uitgebrei kan word nie:

Laat ℓ_2 die Hilberruimte wees bestaande uit alle oneindige rye $x = (x_1, x_2, \dots)$ met die eienskap dat $\|x\| = \{\sum_i |x_i|^2\}^{1/2} < \infty$. Beskou die afbeelding

$$Ax = ((1 - \|x\|^2)^{1/2}, x_1, x_2, \dots), \|x\| \leq 1.$$

Dan is $\|Ax\| = 1$ indien $\|x\| \leq 1$ sodat A die eenheidskyf in ℓ_2 in homself afbeeld. Aangesien

$$\|Ax - Ay\| = \{(1 - \|x\|^2)^{1/2} - (1 - \|y\|^2)^{1/2}\}^2 + \sum_i |x_i - y_i|^2\}^{1/2}$$

vir alle $\|x\|, \|y\| \leq 1$, is A 'n kontinue afbeelding. Die afbeelding A besit egter geen dekpunte nie. Indien $Ax = x$, dan sal $x_{n+1} = x_n$, $n \geq 1$ en dus moet $x_n = 0$ vir alle $n \geq 1$ ten einde te verseker dat $x \in \ell_2$; maar $x_1^2 = 1 - \|x\|^2$ wat strydig is.

Die voorbeeld toon duidelik dat die topologie van genormeerde oneindig dimensionale vektorruimtes drasties van eindig dimensionale vektorruimtes verskil. Schauder¹⁵ het aangetoon dat kompaktheid 'n "brug" tussen eindige en oneindige dimensies vorm:

Indien D 'n begrensde, geslote en konvekse deelversameling van 'n Banach-ruimte is en A 'n kompakte operator op D sodanig dat $A(D) \subset D$, dan besit A 'n dekpunt in D .

Die sentrale gedagte in Schauder se bewys is om 'n kompakte operator te "benader" deur operatore A_n met die eienskap dat $A_n(D)$ eindig dimensionaal is en dan van Brouwer se stelling gebruik te maak.

Die volgende voorbeeld illustreer die idees in die paragraaf:

Laat μ 'n komplekse getal wees só dat $|\mu| > 2$. Ons sal aantoon dat die integraalvergeliking

$$(3) \quad \mu f(x) = \sin f(x) + \int_0^1 \frac{dy}{1+x+f^2(y)}, x \in [0, 1]$$

'n oplossing f in die ruimte $C[0, 1]$ het.

Ons skryf (3) in die vorm

$$(4) \quad f = Af + Bf$$

met

$$Af(x) = \frac{1}{\mu} \sin f(x); Bf(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^1 \frac{dy}{1+x+f^2(y)};$$

$$x \in [0, 1].$$

Aangesien $|\sin x_1 - \sin x_2| \leq |x_1 - x_2|$ vir alle x_1, x_2 met $|x_i| \leq 1, i = 1, 2$, volg dat A 'n sametrekking is op $D_1 = \{f \in C[0, 1] : \|f\| \leq 1\}$ met sametrekkingskonstante $q = |m|^{-1}$. Uit paragraaf 1 lei ons af dat B 'n kompakte operator is. Aangesien $|\mu| > 2$, sal

$$Af + Bg \in D_1 \text{ vir alle } f, g \in D_1.$$

Vir 'n vaste g is die afbeelding $f \mapsto Af + Bg$ 'n same-trekking en dus bestaan op grond van die sametrekkingstelling vir elke $g \in D_1$ 'n $f \in D_1$ só dat

$$(5) \quad Bg = (I - A)f$$

Laat $T = I - A$. Dan, indien $f_1, f_2 \in D$, sal

$$\|Tf_1 - Tf_2\| = \|f_1 - f_2 - (Af_1 - Af_2)\| \geq (1 - q)\|f_1 - f_2\|.$$

T is dus 'n homeomorfisme van D_1 op $TD_1 = S$ (sê) en sy inverse T^{-1} beeld deelversamelings in $S \cap D_1$ wat in D_1 relatief kompakt is op relatief kompakte deelversamelings van D_1 af. Dié opmerkings tesame met (5) impliseer dat $(I - A)^{-1}B$ 'n kompakte afbeelding is wat D_1 in D_1 afbeeld en dus op grond van Schauder se stelling 'n dekpunt f in D_1 besit; maar $(I - A)^{-1}Bf = f$ beteken dat $Bf = f - Af$ en die oplossing van (4) is gevind.

4. Linearisering

Laat B en C Banachruimtes wees. 'n *Lokale homeomorfisme* in die punt $p \in B$ is 'n afbeelding F wat 'n omgewing van die punt p homeomorf op 'n omgewing van die punt $F(p)$ in C afbeeld. Indien F in die punt p deur 'n lineêre operator benader kan word (byvoorbeeld as F in die punt p Fréchet-differensieerbaar is), dan gebeur dit dikwels dat uit die eienskappe van die lineêre operator inligting aangaande die gedrag van die funksie F in 'n omgewing van die punt p afgelei kan word. Die proses word "linearisering" genoem en is ook die kiem van die differensiaal-analise. Die volgende stelling is 'n belangrike voorbeeld van die beginsel.

4.1 (Die Inverse funksiestelling): Gestel F is 'n C^1 -afbeelding gedefinieer op 'n omgewing van 'n punt p in die Banachruimte B met waardeversameling in 'n Banachruimte C . Dan, indien $f(p)$ 'n lineêre homeomorfisme van B op C is, is F 'n lokale homeomorfisme in die punt p . (Vir 'n bewys, sien bv. Dieudonné⁶ of Berger³.)

'n Natuurlike vraag is nou: wanneer is 'n funksie F wat in elke punt van sy definisieversameling 'n lokale homeomorfisme is, ook 'n (globale) homeomorfisme? (Globaliseringsprobleem). In die beantwoording van die vraag speel die begrip van 'n *egte afbeelding* 'n belangrike rol: 'n Afbeelding $F : B \rightarrow C$ word 'n *egte afbeelding* genoem indien die inverse beeld $F^{-1}(\sigma)$ kompakt is vir enige kompakte deelversameling σ van C . (Vir 'n deeglike studie van egte afbeeldings sien Bourbaki.⁵)

4.2 (Banach en Mazur (1934)).¹ Gestel B en C is Banachruimtes en $F : B \rightarrow C$ is 'n kontinue afbeelding. Dan is F 'n homeomorfisme as en slegs as F 'n lokale homeomorfisme in elke punt p van B is.

'n Elegante benadering tot dié soort probleme vind 'n mens in Plastock¹³ waar die teorie van oordekkingsruimtes gebruik word om homeomorfismes tussen Banachruimtes te bestudeer. Uit 4.1 en 4.2 kan ons nou die volgende afleiding maak:

4.3 Gestel $F : B \rightarrow C$ is egte C^1 -afbeelding en $F(p)$ is 'n lineêre homeomorfisme in elke punt p in B , dan is F 'n (globale) homeomorfisme.

Die omgekeerde geld ook – die bewys is 'n eenvoudige toepassing van die kettingreël.

Die volgende resultaat illustreer die lokaal-na-globaaltegniek soos in hierdie paragraaf uiteengesit.

Gestel $k : [0, 1] \times [0, 1] \times C \rightarrow C$ is 'n kontinue en begrensde funksie met die eienskap dat $k_z(x, y, z)$ bestaan en $|k_z(x, y, z)| \leq M$ vir alle x, y, z in die definisieversameling van k . Indien λ 'n komplekse getal is sodanig dat $|\lambda| > M$, dan is die operator K gedefinieer deur

$$Kf(x) = \int_0^1 k(x, y, f(y))dy - \lambda f(x), f \in C[0, 1]$$

'n (globale) homeomorfisme van $C[0, 1]$.

Eerstens moet ons bewys dat K 'n egter afbeelding is. Met dié doel voor oë gebruik ons die volgende nuttige maatstaf vir egte afbeeldings:

Gestel 'n operator K op 'n Banachruimte is 'n kompakte versteuring van 'n egte operator (dit wil sê, $K = E + C$ met E eg en C kompakt) en $\|Kf\| \rightarrow \infty$ indien $\|f\| \rightarrow \infty$, dan is K 'n egter operator. (Vir 'n bewys sien Berger³ p. 103.)

Dit is duidelik dat K 'n kompakte versteuring van die afbeelding λI is, wat op sy beurt 'n egte afbeelding is. Aangesien k 'n begrensde funksie is, lei ons af dat $\|Kf\| \rightarrow \infty$ indien $\|f\| \rightarrow \infty$. Dus is K 'n egte afbeelding.

Indien K gedifferensieer word, dan (sien paragraaf 1) vind ons vir $g \in C[0, 1]$ dat

$$K'(g)h(x) = \int_0^1 k_z(x, y, g(y))h(y)dy + \lambda h(x),$$

$$h \in C[0, 1], x \in [0, 1]$$

Skryf $K'(g) = L + \lambda I$. Aangesien $\|Lh\| \leq M\|h\|$, $h \in C[0, 1]$, volg dat $\|L\| \leq M$ en $L + \lambda I$ is interveerbaar met $(L + \lambda I)^{-1}$ begrens, want $|\lambda| > M$.

(Elementêre lineêre operatorteorie.) Die resultaat volg nou uit (4.3).

5. Homotopie

Laat $D^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| < 1\}$ en laat S^n die rand van D^{n+1} aandui. Gestel $f : \overline{D^{n+1}} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ is 'n kontinue afbeelding só dat $f(x) \neq 0$ vir alle x in S^n . Dit gebeur dikwels dat die oplosbaarheid van die vergelyking $f(x) = 0$ in x volledig beslis kan word deur slegs die eienskappe van die funksie op die rand S^n van D^{n+1} in ag te neem. 'n Belangrike voorbeeld van die verskynsel is die volgende:

Gestel $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$ is 'n kontinue afbeelding. Dan besit elke uitbreiding van die funksie f na $\overline{D^{n+1}}$ 'n nulpunt in D^{n+1} (d.w.s. f is wesenlik m.b.t. D^{n+1}) as en slegs as die homotopie-klas $[f]$ van f in die homotopiegroep $\pi_n(\mathbb{R}^n - \{0\})$ nie triviaal is nie, d.w.s. $[f] \neq 0$.

Laat $C^0(S^n, \mathbb{R}^{n+1})$ die versameling van kontinue funksies wat S^n in $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ afbeeld, aandui. Aangesien

$$\pi_n(\mathbb{R}^n - \{0\}) \cong \pi_n(S_n) \cong \mathbb{Z},$$

volg dat daar 'n funksie

$$d : C^0(S^n, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{Z}$$

bestaan sodanig dat

- (a) $d(f) = d(g)$ as en slegs as f en g in S^n homotoop is;
- (b) $d(f) \neq 0$ as en slegs as f wesenlik met betrekking tot D^{n+1} is; en
- (c) indien $f(x) \equiv x$ vir alle x in S^n , dan is $d(f) = 1$.

Ter illustrasie, laat $F : \overline{D^{n+1}} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ enige kontinue funksie wees sodat die beperking f van F op S^n voldoen aan $f(x) \equiv x$. Aangesien $d(f) = 1$ (uit (c)) moet f wesenlik m.b.t. D^{n+1} wees a.g.v. (b)). Gevolglik besit F 'n nulpunt in D^{n+1} .

Dit kan aangetoon word³ dat enige twee afbeeldings wat die eenheidsfeer van 'n separabele Hilbertruimte H in homself afbeeld, noodwendig homotoop is. Dit volg uit die bestaan van 'n dekpuntvrye afbeelding $\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_1$ waar $\Sigma_1 = \{x \in H : \|x\| < 1\}$. (Sien Kakutani se voorbeeld in paragraaf 3.) Dus moet die homotopiebegrip op Banachruimtes 'n verfyning ondergaan - 'n suksesvolle verfyning is deur Leray en Schauder¹² bewerkstellig deur gebruikmaking van 'n kompakte homotopieteorie.

Gestel S is 'n geslote deelversameling van 'n Banachruimte X en $f : X \rightarrow X$ 'n kontinue afbeelding. Indien $p \in X$, laat $C_p^0(S, X)$ die versameling van alle kompakte versteurings G van f op S aandui met die eienskap dat $G(x) \neq p$ vir alle x in S . Twee funksies G_0 en G_1 in $C_p^0(S, X)$ word *kompak homotoop* genoem indien 'n kontinue afbeelding $H : S \times [0, 1] \rightarrow X$ bestaan só dat vir elke t in $[0, 1]$ die funksie $f(x) + H(x, t)$ in $C_p^0(S, X)$ geleë is en $f(x) + H(x, 0) \equiv G_0(x)$, $f(x) + H(x, 1) \equiv G_1(x)$ vir alle x in S .

Gestel D is 'n begrensde, samehangende en oop deelversameling van 'n Banachruimte X met rand ∂D en laat p 'n punt in X wees. 'n Kontinue funksie $g : \partial D \rightarrow X$ word p -wesenlik m.b.t. D genoem indien

vir elke kontinue uitbreiding G van g na D 'n punt x in D bestaan só dat $G(x) = p$.

Die resultate van Leray - Schauder¹² behels onder andere die volgende:

Daar bestaan 'n afbeelding

$$d(\bullet, p, D) : C_p^0(D, X) \rightarrow \mathbb{Z}$$

(I is die identiteitsafbeelding op D) met die volgende eienskappe:

- (a) Indien F en G kompak homotoop in $C_p^0(\partial D, X)$ is, dan is $d(F, p, D) = d(G, p, D)$. Indien D konveks is, dan is die omgekeerde ook waar.
- (b) Indien D konveks is, dan is 'n afbeelding F in $C_p^0(\partial D, X)$ p -wesenlik m.b.t. D as en slegs as $d(F, p, D) \neq 0$.
- (c) $d(I, p, D) = 1$ indien $p \in D$ en $d(I, p, D) = 0$ indien $p \notin D$.

Die funksie word die Leray-Schaudergraadfunksie genoem. 'n Eenvoudige toepassing van die resultate is die volgende:

Die integraalvergelyking

$$f(x) = \int_0^1 |x + f(y)|^{1/2} dy, \quad f \in C[0, 1], \quad x \in [0, 1]$$

besit 'n oplossing.

Ten einde die resultaat te bewys, skryf ons die vergelyking in die vorm $If - Kf = 0$. Laat $D = \{f : \|f\| < 2\}$. Indien $f \in \partial D$ dan is $If - tKf \neq 0$ vir alle $t \in [0, 1]$; andersins indien $\|f\| = \|f(x_0)\|$ sal 'n t bestaan só dat

$$2 = t \int_0^1 |x_0 + f(y)|^{1/2} dy < \sqrt{3},$$

wat strydig is. Dus is die afbeelding $H(f, t) = (I - tK)f$, $f \in \partial D$ 'n kompakte homotopie van $I - K$ na I . Uit (a) en (c) volg dat $d(I - K, 0, D) = d(I, 0, D) = 1$ en uit (b) volg dat $I - K$ wesenlik m.b.t. D is.

'n Veralgemening van Leray en Schauder se resultate na kompakte versteurings van lineêre Fredholm-operatore met nie-negatiewe indeks is deur Svarc (1964) bewerkstellig. Dit bring die teorie in verband met 'n stabiele homotopieteorie. Vir 'n uitgebreide uiteensetting van die teorie in dié paragraaf sien Berger³ of Schwartz.¹⁶

Nie-lineêre funksionaalanalise kom eers tot sy reg wanneer dit ingeweeft word in ander wiskundestrukture of toepassingsgebiede. Die teorie van Leray en Schauder het byvoorbeeld ontstaan tydens 'n studie van die Navier-Stokesdifferensiaalvergelykings in hidrodinamika. (Vir 'n duidelike uiteensetting van die werk sien Sattinger.¹⁴)

Dit is egter belangrik dat 'n breër raamwerk gevind word waar beide oneindigheid van dimensie en nie-lineariteit voorkom. Die meeste topologiese resultate tot dusver berus op 'n uitbreiding van eindig dimensionale resultate en is dus ook slegs suksesvol vir funksies wat nie te ver afwyk van funksies met eindig dimensionale waardeversamelings nie.

Ten slotte wil die skrywer sy opregte dank teenoor professor B. de la Rosa uitspreek vir sy kommentaar en voorstelle in verband met die aanbieding van die artikel. Alle onduidelikhede of foute in die artikel is natuurlik die skrywer se verantwoordelikheid.

LITERATUURVERWYSINGS

1. Banach, S., en Mazur, S. (1934). Über mehrdeutige stetige Abbildungen, *Studia Math.*, 5, 174-178.
2. Benjamin, T.B. (1976). Applications of Leray-Schauder degree theory to problems of hydrodynamic stability, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 79, 373-392.
3. Berger, M. (1977). *Nonlinearity and Functional Analysis*. (Academic Press, New York).
4. Berger, M. en Berger, M. (1968). *Perspectives in Nonlinearity* (Benjamin, New York).
5. Bourbaki, N. (1949). *Elements de mathematique* (Hermann, Paris).
6. Dieudonné, J. (1960). *Foundations of modern analysis* (Academic Press, New York).
7. Flett, T.M. (1979). *Differential analysis* (Cambridge University Press).
8. Holtzman, J.M. (1970). *Nonlinear system theory* (Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey).
9. Krasnoselskii, M.A. (1958). Some problems of nonlinear analysis, *Amer. Math. Soc. Transl. (2)*, 10, 345-408.
10. Krasnoselskii, M.A. (1964a). *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations* (Permagon Press, London).
11. Ladyzenskaya, O.A. (1969). *The mathematical theory of viscous incompressible flow* (Gordon and Breach, New York).
12. Leray, J. en Schauder, J. (1934). Topologie et equations fonctionnelles. *Ann. Sci. Ecole. Norm. Sup.*, 51, 45-78.
13. Plastock, R. (1974). Homeomorphisms between Banach spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 200, 169-183.
14. Sattinger, D.H. (1973). Topics in Stability and Bifurcation Theory, *Lecture Notes in Math.*, 309, Springer-Verlag, Berlin.
15. Schauder, J. (1930). Der fixpunktsatz im funktionalraumen, *Studia Math.*, 2, 171-180.
16. Schwartz, J.T. (1969). *Nonlinear functional analysis* (Gordon and Breach, New York).
17. Spanier, E. (1966). *Algebraic topology* (McGraw-Hill, New York).
18. Stuart, C.A. (1974). Existence theorems for a class of monlinear integral equations. *Math. Z.*, 137, 49-66.
19. Svarc, A.S. (1964). *Dokl. Akad. Nauk USSR*, 154, 61-63.
20. Zabreyko, P.P. et al. (1975). *Integral equations—reference text* (Noordhoff, Groningen).