Navorsings- en Oorsigartikels

Vooraftoetskrimp-skatters

H.H. Lemmer

Dept. Statistiek, R.A.U., Posbus 524, Johannesburg 2000

UITTREKSEL

Die gebruik van die baie eenvoudige krimp-skatter T_L , voorgestel deur Lemmer,² eerder as dié voorgestel deur Mehta en Srinivasan⁴ in die geval van vooraftoetskatters vir parameters van die normaal-, binomiaal- en Poissonverdelings, word ondersoek. Upadhyaya en Srivastava⁶ het 'n vooraftoetskrimp-skatter $\hat{\mu}_P$ vir die gemiddeld van 'n normaal (μ, σ^2) -verdeling voorgestel. Dit maak gebruik van die Mehta en Srinivasan⁴-krimp-skatter T_M indien die hipotese $H_0: \mu = \mu_0$ nie verwerp word nie, en $\bar{x}$ indien H_0 verwerp word. In die geval van gewone krimp-skatters het ons bevind (Lemmer³) dat T_L verkieslik is bo T_M , en ons stel nou ook voor dat T_L in plaas van T_M in die vooraftoetskrimp-skatter gebruik word. Ons beskou nie alleen die normaalverdeling soos Upadhyaya en Srivastava⁶ nie, maar ook die binomiaal- en Poissonverdelings. (Hirano¹ het ook oor hierdie probleem gewerk, maar was blykbaar onbewus van die werk van Upadhyaya en Srivastava.⁶) Ons bevinding is, net soos by gewone krimp-skatters, dat die gebruik van T_L ook in hierdie geval verkieslik is bo die meer ingewikkelde T_M .

ABSTRACT

Preliminary test-shrinkage estimators

The advantages of using the very simple shrinkage estimator T_L proposed by Lemmer² rather than that proposed by Mehta and Srinivasan⁴ in the case of preliminary test estimators for parameters of the normal, binomial and Poisson distributions are examined. Upadhyaya and Srivastava⁶ proposed a preliminary test-shrinkage estimator $\hat{\mu}_P$ for the mean of a normal (μ, σ^2) distribution. It utilizes the Mehta and Srinivasan⁴ shrinkage estimator T_M if the hypothesis $H_0: \mu = \mu_0$ is not rejected, and $\bar{x}$ if H_0 is rejected. In the case of ordinary shrinkage estimators, we prefer to use the shrinkage estimator T_L rather than T_M (Lemmer³), and in this note we propose using T_L in the pretest shrinkage estimator. We do not limit our study to the normal distribution as Upadhyaya and Srivastava,⁶ but we consider estimators for parameters of the binomial and Poisson distributions also. (Hirano¹ worked on this problem too, but was apparently unaware of the work of Upadhyaya and Srivastava.⁶) We conclude that the estimator based on T_L is preferable to that based on T_M because it has higher efficiency over the effective interval and is much simpler than the latter.

1. KRIMPSKATTERS

Wanneer 'n onbekende parameter θ geskat moet word, bestaan daar dikwels die een of ander vorm van vooraf kennis van die parameter waarvan mens graag gebruik wil maak om 'n beter skatter te kry as wanneer dié vooraf kennis geïgnoreer word. Die Bayesmetode, waar daar gebruik gemaak word van die aprioriverdeling van die betrokke parameter, is 'n bekende voorbeeld in dié verband.

In die geval van sogenaamde krimp-skatters (shrinkage estimators) bestaan daar volgens Thompson⁵ 'n "natuurlike oorsprong" θ_0 wat sodanig is dat ons byvoorbeeld die minimum variansie onsydige (lineêre) skatter $\hat{\theta}$ van θ nader aan θ_0 wil beweeg om 'n skatter te kry wat in die omgewing van die natuurlike oorsprong beter is as $\hat{\theta}$. Sodanige natuurlike oorsprong kan volgens Thompson⁵ om verskeie redes ontstaan, byvoorbeeld ons skat 'n parameter θ en (1) ons glo dat θ_0 naby aan die werklike waarde van θ is, of (2) ons vrees dat θ_0 naby aan die werklike

waarde van θ kan wees, d.w.s. iets ongunstigs gebeur indien $\theta \approx \theta_0$ en ons weet nie daarvan nie. In sulke gevalle neem ons die gewone skatter $\hat{\theta}$ van θ (byvoorbeeld die minimumvariensie onsydige skatter of die maksimumaanneemlikheidskatter) en beweeg dit nader aan θ_0 . 'n Skatter wat op hierdie wyse gekonstrueer word, word 'n krimp-skatter genoem. Omdat 'n krimp-skatter normaalweg nie 'n onsydige skatter sal wees nie, word die skatter se gemiddelde vierkantfout (mean squared error = MSE) eerder as sy variansie as maatskaf gebruik om te oordeel hoe goed hy is. 'n Krimp-skatter het gewoonlik die eienskap dat sy gemiddelde vierkantfout relatief klein is as θ naby aan θ_0 is, maar groter word hoe verder θ en θ_0 van mekaar af beweeg. Die filosofie onderliggend aan krimp-skatters is dat vooraf kennis mens in staat stel om inderdaad 'n redelik goeie raaiskoot te waag, sodat mens redelike vertroue het dat θ_0 en θ wel naby aan mekaar lê en die krimp-skatter dus beter as die gewone skatter $\hat{\theta}$ is.

2. VOORAFTOETSKRIMPSKATTERS

Beskou die krimpskatter van die parameter θ , nl.

$$(2.1) \quad T_L = k\hat{\theta} + (1-k)\theta_0 \text{ met } 0 \leq k \leq 1,$$

θ_0 die waarde wat vir θ geraai word en $\hat{\theta}$ die minimumvariansie onsydige skatter van θ – kyk Lemmer.³ T_L is 'n spesiale geval van die Mehta en Srinivasan⁴-skatter

$$(2.2) \quad T_M = \hat{\theta} - a(\hat{\theta} - \theta_0) \exp[-b(\hat{\theta} - \theta_0)^2 / \text{var}(\hat{\theta})]$$

met a en b konstantes. T_M reduceer na T_L met $k=1-a$ indien $b=0$. Die vooraftoetskrimpskatter vir θ voorgestel deur Uphadyaya en Srivastava⁶ kan geskryf word as

$$(2.3) \quad \hat{\theta}_P = \begin{cases} T_M & \text{indien } H_0 : \theta = \theta_0 \text{ nie verwerp word nie} \\ \hat{\theta} & \text{andersins.} \end{cases}$$

Ons stel die eenvoudiger vooraftoetskrimpskatter voor, nl.

$$(2.4) \quad PT_L = \begin{cases} T_L & \text{indien } H_0 \text{ nie verwerp word nie} \\ \hat{\theta} & \text{andersins.} \end{cases}$$

Daar sal aangetoon word dat PT_L in die omgewing van $\theta = \theta_0$ 'n hoër relatiewe doeltreffendheid (REF) met betrekking tot $\hat{\theta}$ het as $\hat{\theta}_P$, terwyl die REF van $\hat{\theta}_P$ hoër is as dié van PT_L vir θ ver van θ_0 . Aangesien dit juis die filosofie van 'n krimpskatter is dat 'n mens 'n

FIGUUR 2: Binomiaalverdeling $n=8$, $\pi_0=0,3$.

FIGUUR 1: Normaalverdeling.

FIGUUR 3: Poissonverdeling $\eta_0=10$.

goeie idee het van die waarde van θ , is die werklike onbekende waarde van θ hopelik naby aan θ_0 , en is die gedrag van PT_L vir θ in die omgewing van θ_0 van meer belang as wat dit ver van θ_0 is. Daarom is PT_L verkieslik bo $\hat{\theta}_P$. Verder is PT_L baie makliker berekenbaar as $\hat{\theta}_P$ en het sy konstruksie 'n duideliker betekenis: In PT_L is $(1-k)$ die vertroue wat die gebruiker in sy raaiskoot θ_0 het, terwyl die waardes wat aan a en b in T_M toegeken word, willekeurig is.

In ons studies is die gedrag van die skatters by verskillende betekenispeile α ondersoek. Soortgelyke resultate is verkry; daarom word alleen die geval waar α gelyk aan 5% (of so na as moontlik daaraan) is, gerapporteer.

3. VERGELYKING VAN SKATTERS

3.1 Die gemiddelde van 'n normaal (μ, σ^2) -verdeling met bekende variansie

Laat $\bar{x}$ die gemiddeld wees van 'n steekproef van grootte n uit 'n normaal (μ, σ^2) -verdeling, en μ_0 die waarde wat vir μ geraai word. Dan is

$$(3.1) \quad PT_L = \begin{cases} T_L & \text{indien } \mu_0 - z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} < \bar{x} < \mu_0 + z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} \\ \bar{x} & \text{andersins} \end{cases}$$

waar

$$(3.2) \quad T_L = k\bar{x} + (1-k)\mu_0$$

en z_α die α kritieke waarde van die normaalverdeling is ($z_{\alpha/2} = 1,96$ vir $\alpha = 0,05$). Die skatter $\hat{\mu}_P$ is soortgelyk aan PT_L met T_L vervang deur

$$(3.3) \quad T_M = \bar{x} - a(\bar{x} - \mu_0)\exp[-nb(\bar{x} - \mu_0)^2/\sigma^2].$$

Vir vergelykingsdoeleindes neem ons $\mu_0 = 0$, en met $\sqrt{n} \mu/\sigma = \delta$ kry ons

$$\begin{aligned} \text{MSE}(PT_L) &= E(P_T - \mu)^2 \\ &= \sigma^2/(n\sqrt{2\pi}) \left[\int_{-\infty}^{-z_{\alpha/2}} (x-\delta)^2 e^{-1/2(x-\delta)^2} dx \right. \\ &\quad + \int_{-z_{\alpha/2}}^{z_{\alpha/2}} (kx-\delta)^2 e^{-1/2(x-\delta)^2} dx \\ &\quad \left. + \int_{z_{\alpha/2}}^{\infty} (x-\delta)^2 e^{-1/2(x-\delta)^2} dx \right] \end{aligned}$$

wat maklik deur numeriese integrasie bereken kan word, en $\text{REF}(PT_L, \bar{x}) = \text{MSE}(\bar{x})/\text{MSE}(PT_L)$ met $\text{MSE}(\bar{x}) = \sigma^2/n$.

Beskou $k = 0,5$. Die REF-kromme van PT_L (no. 1 in figuur 1) is simmetries om $\delta_0 = 0$, en stem ooreen met $\hat{\mu}_P$ vir $a = 1 - k = 0,5$ en $b = 0$. Deur $b = 0,1$ te neem, het die effek dat $\hat{\mu}_P$ oor die belangrikste deel van δ se waardegebied swakker as PT_L is (kromme 2 in figuur 1). Die effektiewe intervale is byna dieselfde. Deur $b = 0,6$ te neem (kromme 3), word gesien dat b verkieslik klein moet wees. Vir $k = 0,75$ en $a = 0,25$ word soortgelyke resultate verkry – kyk na krommes 4-6 in figuur 1. Ander gevalle wat ondersoek is, het soortgelyke resultate gelewer. Die wysigings nodig vir σ^2 onbekend, is voor-die-hand-liggend (kyk Uphadyaya en Srivastava⁶).

3.2 Die parameter π van die binomiaal (n, π) -verdeling

$$\text{Laat } PT_L = \begin{cases} k\pi + (1-k)\pi_0 & \text{vir } r_1 \leq r \leq r_2 \\ p & \text{andersins} \end{cases}$$

waar $p = r/n =$ steekproefverhoudingsukses, π_0 die geraaide waarde van π en waar r_1 en r_2 sodanig bepaal word dat

$$\sum_{r=r_1}^{r_2} \binom{n}{r} \pi_0^r (1-\pi_0)^{n-r} = 1 - \alpha \text{ met } \alpha \text{ in die omgewing van } 0,05.$$

$$\text{MSE}(PT_L) = E(P_T - \pi)^2$$

$$\begin{aligned} &= I(r_1 > 0) \sum_{r=0}^{r_1-1} \left(\frac{r}{n} - \pi \right)^2 \binom{n}{r} \pi^r (1-\pi)^{n-r} \\ &\quad + \sum_{r=r_1}^{r_2} (kr/n + (1-k)\pi_0 - \pi)^2 \binom{n}{r} \pi^r (1-\pi)^{n-r} \\ &\quad + I(r_2 < n) \sum_{r=r_2+1}^n \left(\frac{r}{n} - \pi \right)^2 \binom{n}{r} \pi^r (1-\pi)^{n-r} \end{aligned}$$

met $I(\bullet)$ die indikatorfunksie, nl. $I(A) = 1$ indien A realiseer, en $= 0$ andersins.

$$\text{REF}(PT_L, p) = \text{MSE}(p)/\text{MSE}(PT_L) \text{ waar } \text{MSE}(p) = \pi(1-\pi)/n.$$

Die Upadhyaya en Srivastava-vooraftoetsskatter is

$$\hat{\pi}_P = \begin{cases} p - (p - \pi_0)a \exp[-nb(p - \pi_0)^2/[p(1-p)]] & \text{vir } r_1 \leq r \leq r_2 \\ p & \text{andersins.} \end{cases}$$

Ons het $n = 8, 12$; $\pi_0 = 0,1; 0,3$ en $0,5$ en 'n verskeidenheid waardes van α beskou. Uit figuur 2 ($n = 8$, $\pi_0 = 0,3$, $r_1 = 1$, $r_2 = 6$, $\alpha = 0,059$) is dit duidelik dat PT_L weer eens beter is as $\hat{\pi}_P$. Soortgelyke resultate is in al die gevalle wat beskou is, gevind. Figuur 2 toon dus tipiese resultate.

3.3 Die parameter λ van 'n Poisson(λ)-verdeling

$$\text{Laat } PT_L = \begin{cases} k\bar{x} + (1-k)\lambda_0 & \text{vir } r_1 \leq r \leq r_2 \\ \bar{x} & \text{andersins} \end{cases}$$

waar λ_0 die geraaide waarde van λ is, k 'n konstante: $0 \leq k \leq 1$, $n\bar{x} = r = \sum_{i=1}^n x_i$ vir 'n steekproef $x_1, \dots, x_n$ uit die Poissonverdeling en waar r_1 en r_2 sodanig bepaal word dat $\sum_{r=r_1}^{r_2} e^{-n\lambda_0} (n\lambda_0)^r / r! = 1 - \alpha$ met α ongeveer $0,05$.

$$\begin{aligned} \text{MSE}(PT_L) &= I(r_1 > 0) \sum_{r=0}^{r_1-1} \left(\frac{r}{n} - \lambda \right)^2 e^{-n\lambda} (n\lambda)^r / r! \\ &\quad + \sum_{r=r_1}^{r_2} (kr/n + (1-k)\lambda_0 - \lambda)^2 e^{-n\lambda} (n\lambda)^r / r! \\ &\quad + \sum_{r=r_2+1}^{\infty} \left(\frac{r}{n} - \lambda \right)^2 e^{-n\lambda} (n\lambda)^r / r! \end{aligned}$$

Neem $n\lambda = \eta$ en $n\lambda_0 = \eta_0$. $\text{MSE}(PT_L)$ word bereken as 'n funksie van η vir vaste η_0 , k , r_1 en r_2 .

$\text{REF}(PT_L, \bar{x}) = \text{MSE}(\bar{x})/\text{MSE}(PT_L)$ waar $\text{MSE}(\bar{x}) = \eta/n^2$. Die Upadhyaya en Srivastava vooraftoetsskatter is

$$\hat{\lambda}_p = \begin{cases} \bar{x} - (\bar{x} - \lambda_o)a \exp[-b(r - \eta_o)^2/r] & \text{vir } r_1 \leq r \leq r_2 \\ \bar{x} & \text{andersins.} \end{cases}$$

In figuur 3 het ons $\eta_o = 10$, $r_1 = 5$, $r_2 = 16$ (dus $\alpha = 0,056$).

Soortgelyke resultate is verkry vir $\eta_o = 2$ en 6. Weer eens is dit duidelik dat PT_L oor die belangrikste gebied beter as $\hat{\lambda}_p$ is.

4. GEVOLGTREKKING

In alle gevalle beskou, het PT_L die hoogste relatiewe doeltreffendheid oor die belangrikste gebied, d.w.s. oor die effektiewe interval. Daarbenevens is PT_L baie makliker berekenbaar as $\hat{\theta}_p$, aangesien dit gebaseer is op die krimpskatter $T_L = k\hat{\theta} + (1-k)\theta_o$, waarin $(1-k)$ die gebruiker se vertroue in sy raaiskoot θ_o is. Die gebruik van PT_L bo $\hat{\theta}_p$ word dus sterk aanbeveel.

ERKENNINGS

Mnr. W.A.J. du Toit word bedank vir die uitvoering van die berekeninge en die teken van die figure. Dank word ook betuig aan die R.A.U. en W.N.N.R. vir navorsingstoekennings.

VERWYSINGS

1. Hirano, K. (1977). Estimation procedures based on preliminary test, shrinkage technique and information criterion, *Ann. Inst. Statist. Math.*, 29, 21-34.
2. Lemmer, H.H. (1981a). Note on shrinkage estimators for the binomial distribution, *Communications in Statistics*, A10, 1017-1027.
3. Lemmer, H.H. (1981b). From ordinary to Bayesian shrinkage estimators. *S. Afr. Statist. J.*, 15, 57-72.
4. Mehta, J.S. and Srinivasan, R. (1971). Estimation of the mean by shrinkage to a point, *J. Amer. Statist. Assoc.*, 66, 86-90.
5. Thompson, J.R. (1968). Some shrinkage techniques for estimating the mean, *J. Amer. Statist. Assoc.*, 63, 113-122.
6. Upadhyaya, L.N. and Srivastava, S.R. (1975). Shrinkage estimator of the mean of a normal population after a preliminary test of significance, *J. Statistical Research*, 9, 67-74.