Navorsings- en Oorsigartikels

Hoe foto's van planete op die aarde kom

C. Roos
Afdeling Wiskunde, T.H. Delft, Nederland

en

M.J. Schoeman
Departement Wiskunde, Universiteit van Pretoria, Pretoria 0002

UITTREKSEL

Die wyse waarop foto's van planete na die aarde oorgesend word, word bespreek. Probleme wat kan voorkom, word vermeld en 'n metode word bespreek waarmee foute opgespoor en reggestel kan word. Dit is 'n oorsigartikel en daar is nie na 'n streng wiskundige uiteensetting gestreef nie.

ABSTRACT

How photos of planets reach the earth

The way in which photos of planets are transmitted to the earth is discussed. Problems that may arise during transmission are mentioned and a method to detect and correct errors is discussed. This is a survey article and the aim was not to give a rigorous mathematical explanation.

1. INLEIDING

Die foto's van die planeet Saturnus wat in Augustus 1981 deur die ruimtetuig Voyager 2 na die aarde gestuur is en daarna in koerante en op die televisieskerm te sien was, het baie mense se belangstelling in ruimtenavorsing opnuut geprikkel. Dit het wetenskaplikes ook in staat gestel om hulle planetêre teorieë te hersien, soos al meermale gedoen moes word sedert Galileo in 1610 die eerste teleskopiese waarneming van Saturnus gemaak het. Galileo se teleskoop was te klein om die ringe te onderskei, en hy het gedink dat Saturnus uit drie dele bestaan wat feitlik aan mekaar raak. Later is geglo dat die ringe solied is, maar Maxwell het in 1875 aangetoon dat dit nie die geval is nie, want soliede ringe sou deur die gravitasiekrag van Saturnus vernietig word.

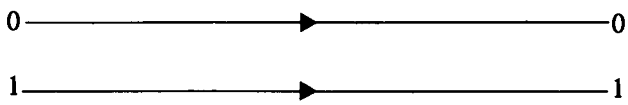
Sedert die koms van die ruimtetuie is wetenskaplikes nie meer so afhanklik van teleskope om planete te bestudeer nie. Meer akkurate besonderhede daarvan word verkry deur foto's te bestudeer wat deur 'n ruimtetuig na die aarde gestuur word. Maar hoe word sulke foto's oor afstande van miljoene kilometers (Saturnus se afstand van die son wissel tussen 1347 en 1507 miljoen kilometer) na die aarde gestuur?

Hieronder sal probeer word om die leser 'n idee te gee van hoe dit gedoen word, en van probleme wat rondom die oorsendings ontstaan. Die bespreking is populêr van aard en daar is nie gestreef na streng wiskundige formulerings van begrippe nie.

2. METODE

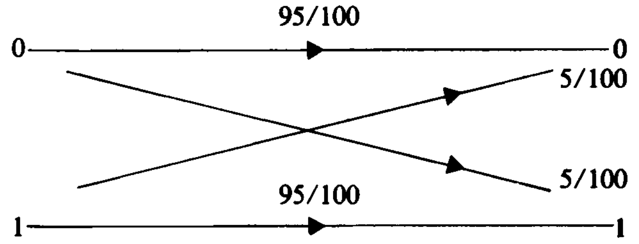
'n Foto wat oorgesend moet word, word eers verdeel in baie klein vierkantjies, en van elke vierkantjie word die donkerheidsgraad gemeet op 'n skaal wat wissel van 0 tot 63. Elke vierkantjie word dus, afhangende van die donkerheidsgraad daarvan, geassosieer met een van die getalle 0, 1, 2, . . . , 63. Vervolgens word elk van die getalle in binêre vorm (bestaande uit ses nulle en/of ene) geskryf. 'n Vierkant met donkerheidsgraad $10 = 0.2^5 + 0.2^4 + 1.2^3 + 0.2^2 + 1.2 + 0$ word dus voorgestel deur 001010 en 'n vierkant met donkerheidsgraad 63 deur 111111.

'n „Foto" bestaan dus uit 'n lang ry nulle en ene. Die nulle en ene word dan as punte en strepe ("dots and dashes") na die aarde gestuur, waar die donkerheidsgraad weer aan elke getal toegeken word.



FIGUUR 1

Indien elke 0 (en elke 1) wat gestuur word, korrek as 0 (en 1) ontvang word, (kyk figuur 1) kan 'n presiese foto op hierdie wyse opgebou word. By ontvangs in Pasadena is die seine egter so swak dat dit versterk moet word. Hierdeur, asook deur steurnisse tydens oorsending, gebeur dit dikwels dat 0 as 1 ontvang word, en andersom. Die waarskynlikheid dat 'n verkeerde binêre syfer ontvang word, word in 'n *binêre simmetriese kanaal* soos die volgende weergegee (kyk figuur 2).



FIGUUR 2

In hierdie voorstelling word 0 vyf-en-negentig keer uit 'n honderd korrek as 0 ontvang, maar vyf keer uit 'n honderd as 1, en dieselfde as 1 gestuur word. Die waarskynlikheid dat die donkerheidsgraad van 'n vierkantjie reg ontvang word, is dus $(0{,}95)^6 = 0{,}7351$.

In die praktyk kom foute so dikwels voor dat swak foto's ontvang word, en maatreëls moet dus getref word om foute te verminder of uit te skakel. Koderingsteorie is dié afdeling van die Wiskunde waarin tegnieke om foute op te spoor en te korrigeer bestudeer word.

3. DIE STELLING VAN SHANNON

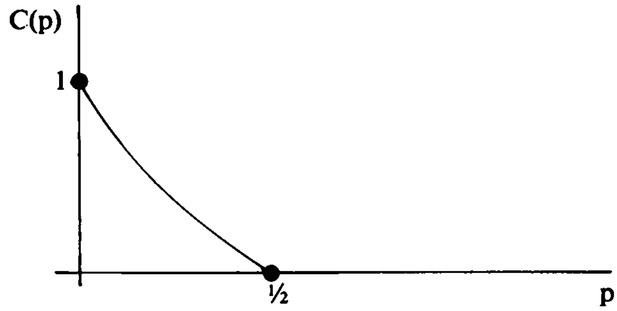
Wat kan gedoen word om foute te verminder of uit te skakel? Dit is voor-die-hand-liggend om elke 0 en 1 meermale te stuur, byvoorbeeld om 0 as 000 en 1 as 111 te stuur. As 010 ontvang word, dan is die waarskynlikheid groot dat 0 gestuur is, terwyl ontvangs van 101 daarop dui dat 1 waarskynlik gestuur is. Die waarskynlikheid dat 'n binêre syfer nou korrek ontvang word, is $q^3 + 3pq^2$, waar $p = 0{,}05$ en $q = 0{,}95$, oftewel 0,9928 (en nie meer 0,95 nie); terwyl die waarskynlikheid dat die donkerheidsgraad van 'n vierkantjie korrek geïnterpreteer word, $(0{,}9928)^6 = 0{,}9573$ is (en nie meer 0,7351 nie) – 'n groot verbetering. Indien elke binêre syfer vyf keer herhaal word, is hierdie getalle respektiewelik $q^5 + 5pq^4 + 10p^2q^3 = 0{,}9988$ en 0,9931, en as elke binêre syfer sewe keer herhaal word, word dit $q^7 + 7pq^6 + 21p^2q^5 + 35p^3q^4 = 0{,}9998$ en 0,9988 respektiewelik. Dit is duidelik dat die betroubaarheid van die uiteindelike foto op hierdie wyse willekeurig groot gemaak kan word. Daar is egter 'n groot nadeel aan hierdie metode verbonde: indien 'n binêre syfer N-keer herhaal word, is die tyd wat nodig is om die foto na die aarde te send ook N-keer groter (indien geen steurings ondervind word nie). Ons druk dit uit deur te sê dat die *informasiesnelheid* $\frac{1}{N}$ is. Die verbetering in kwaliteit van die foto geskied dus ten koste van die informasiesnelheid.

Mens kry die indruk dat by gegewe fout p, dit onmoontlik is om noukeurige resultate te verkry sonder om veel meer tyd vir die oorsending te gebruik. Die Stelling van Shannon, waarmee die koderingsteorie in 1948 sy beslag gekry het, weerlê egter hierdie intuïtiewe gevoel. Volgens hierdie stelling is oorsending oor 'n binêre simmetriese kanaal met $p = 0{,}05$ moontlik met 'n informasiesnelheid van 0,7, terwyl die waarskynlikheid van foute willekeurig klein is. Na wat hierbo bevind is, is hierdie resultaat verbasend.

Voordat 'n presiese formulering van die Stelling van Shannon gegee kan word, moet enkele begrippe verklaar word.

Veronderstel dat die waarskynlikheid van 'n fout p is in die binêre simmetriese kanaal wat gebruik word, $0 \leq p \leq \frac{1}{2}$ en dat $q = 1 - p$. Die *kapasitiet* C(p) van die kanaal word gedefinieer (kyk figuur 3) as

$$C(p) = 1 + p\,{}^2\!\log p + q\,{}^2\!\log q, \quad p \neq 0$$
$$C(0) = 1$$



FIGUUR 3

Veronderstel nou dat die lang ry nulle en ene waaruit 'n foto bestaan, verdeel word in stringe van k binêre syfers elk, en dat 'n koderingsvoorskrif γ gegee is wat aan elke string van k syfers 'n string van n binêre syfers toevoeg, $n \geq k$. (In ons eerste voorbeeld was $k = 1$, $n = 3$ en γ was die voorskrif $0 \to 000$, $1 \to 111$.) Die versameling C_γ van 2^k stringe van n binêre syfers elk word die *kode* genoem. Die informasiesnelheid in hierdie geval is $\frac{k}{n}$. Met P_γ as die waarskynlikheid dat 'n string van k binêre syfers met die koderingsvoorskrif γ verkeerd gedekodeer word, geld:

Die Stelling van Shannon[5]

Vir elke betroubare koderingsvoorskrif is die informasiesnelheid hoogstens C(p). Vir elke $\varepsilon > 0$ en $0 < R < C(p)$ bestaan daar 'n koderingsvoorskrif γ sodanig dat $P_\gamma < \varepsilon$, terwyl die informasiesnelheid ten minste R is.

Hierdie stelling vorm die grondslag van die koderingsteorie. Vir $p = 0{,}05$ is $C(p) = 0{,}7136$ en volgens dié stelling is dit dus moontlik om met 'n informasiesnelheid van 0,7 betroubare resultate te verkry. Die probleem (waarmee koderingsteoretici hulself hoofsaaklik besig hou), is om 'n betroubare koderingsvoorskrif te vind vir 'n gegewe informasiesnelheid. Dit is nie maklik om sulke kodes te vind nie en die kodes wat tot dusver bekend is, is in kwaliteit nog ver agter dié wat volgens die Stelling van Shannon moontlik is.

In die koderingsteorie vind verskeie afdelings van die Wiskunde natuurlike toepassings, waaronder waarskynlikheidsrekening, algebra en lineêre algebra, getalteorie, (eindige) meetkunde, ens. Die belangstellende leser word verwys na die vier inleidende boeke wat in die literatuurverwysings vermeld word.

4. VOORBEELD

In hierdie voorbeeld word die sogenaamde Hammingkode geïllustreer. In dié geval is $k = 4$ en $n = 7$. Die informasiesnelheid is dus $\frac{4}{7}$. Die waarskynlikheid dat 'n string van 4 binêre syfers verkeerdelik ontvang word, sal uitwerk op $21p^2 + 0(p^3)$, waar 0 die ordesimbool van Landau is. Vir klein waardes van p is dit aansienlik beter as die waarskynlikheid 4p by 'n informasiesnelheid van 1. Hierdie verbetering word soos volg bereik: skryf elke string van vier binêre syfers as 'n vektor $\underline{x} = (x_1,x_2,x_3,x_4)$ met $x_i \epsilon \{0,1\}$. Die koderingsvoorskrif voeg aan elke sodanige vektor 'n kodevektor $\underline{c} = (c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6,c_7)$ toe, en wel op die volgende wyse:

$$c_3 = x_1,\ c_5 = x_2,\ c_6 = x_3,\ c_7 = x_4,$$
$$c_1 = x_1 + x_2 + x_4 \pmod 2,$$
$$c_2 = x_1 + x_3 + x_4 \pmod 2,$$
$$c_4 = x_2 + x_3 + x_4 \pmod 2.$$

Hierdie koderingsvoorskrif kan ook voorgestel word as die produk van matrikse:

$$(c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6,c_7) = (x_1,x_2,x_3,x_4)\begin{bmatrix} 1&1&1&0&0&0&0\\ 1&0&0&1&1&0&0\\ 0&1&0&1&0&1&0\\ 1&1&0&1&0&0&1 \end{bmatrix}$$

oftewel $\underline{c} = \underline{x}G$,

waarin G die sogenaamde *koderingsmatriks* is.

Ons sal sien dat hierdie koderingsvoorskrif dit moontlik maak om foute reg te stel, mits daar in elke kodewoord nie meer as een fout gemaak word nie. Dit is duidelik dat elke kodewoord $\underline{c}$ voldoen aan $\underline{c}H = \underline{0}$ met H die matriks:

$$H = \begin{bmatrix} 0&0&1\\ 0&1&0\\ 0&1&1\\ 1&0&0\\ 1&0&1\\ 1&1&0\\ 1&1&1 \end{bmatrix}$$

waarin die i-de ry die binêre voorstelling van die getal i is.

Veronderstel nou dat daar tydens die oorsending van die kodevektor $\underline{c}$ een van kentalle, sê c_i, verander word. Die vektor wat ontvang word, is dan van die vorm $\underline{c}' = \underline{c} + \underline{e}$, waar $\underline{e} = (e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7)$, $e_i = 1$ en $e_j = 0$ as $j \neq i$. Omdat $\underline{c}H = \underline{0}$ volg dat $\underline{c}'H = \underline{e}H$.

Dit is maklik om na te gaan dat $\underline{e}H$ die i-de ry van die matriks H is, en gevolglik is $\underline{c}'H$ presies die binêre representasie van die getal i. Omdat i die posisie van die verkeerde kental in $\underline{c}'$ aangee, moet hierdie kental verander word. Op hierdie wyse word $\underline{c}$ teruggevind en daarna is dit moontlik om ook $\underline{x}$ te rekonstrueer.

Dekodering geskied dus soos volg: vir elke vektor $\underline{c}'$ wat ontvang word, word $\underline{c}'H$ bereken. As $\underline{c}'H = 0$ dan kies ons $\underline{c} = \underline{c}'$. As $\underline{c}'H \neq 0$ dan is $\underline{c}'H$ die binêre voorstelling van 'n getal i, $1 \leq i \leq 7$, en ons kies dan vir $\underline{c}$ die vektor wat uit $\underline{c}'$ ontstaan deur die i-de kental te verander. Die waarskynlikheid van 'n fout is nou die waarskynlikheid dat twee of meer foute in $\underline{c}'$ voorkom, dit wil sê

$$P_\gamma = \sum_{i=2}^{7} \binom{7}{i} p^i q^{7-i} = 21p^2 + 0(p^3)$$

waar 0 die ordesimbool van Landau is. Vir $p = 0{,}05$ vind ons hieruit dat $P_\gamma = 0{,}9556$.

LITERATUURVERWYSINGS

1. McEliece, R.J. (1977). The theory of information and coding, *Encyclopedia of Mathematics and its applications* Volume 3 (Addison-Wesley).
2. Van Lint, J.H. (1971). Coding theory, Lecture notes in, *Mathematics*, 201 (Springer-Verlag).
3. Van Lint, J.H. (1976). *Introduction to coding theory* (Springer-Verlag).
4. MacWilliams, F.J. & Sloane, N.J.A. (1977). *The theory of error-correcting codes* (North-Holland Publ. Co.).
5. Shannon, C.E. (1948). Mathematical theory of communications, *Bell Syst. Techn. J.*, 27, 379-423.