Semiprojektiewe module

D. Döman
Departement Wiskunde, Universiteit van Pretoria, Pretoria 0002

UITTREKSEL

Dit is bekend dat die ondermodule van 'n projektiewe moduul nie noodwendig projektief is nie. In hierdie artikel word 'n soort projektiwiteit ondersoek wat wel behoue bly onder die neem van ondermodule. Hereditêre ringe en QF-ringe word met behulp van hierdie eienskap gekarakteriseer.

ABSTRACT

Semi-projective modules

It is well-known that the submodules of a projective module need not be projective. In this article we investigate a certain projectivity which is preserved under the taking of submodules. This property is used to characterize hereditary rings and QF rings.

Alhoewel 'n ondermoduul van 'n plat moduul nie noodwendig plat is nie, word 'n swakker eienskap as platheid, naamlik semiplatheid, wel van 'n moduul na sy ondermodule oorgedra.[1] Die ondermodule van 'n projektiewe moduul is ook nie noodwendig projektief nie. In hierdie artikel word daar, analoog aan die geval by semiplatheid, 'n moduuleienskap ondersoek wat swakker is as projektiwiteit, maar wat wel van module na hulle ondermodule oorgedra word. Hierdie eienskap word gebruik om twee soorte ringe te karakteriseer.

Tensy anders vermeld, is alle module wat beskou word, linker unitale R-module, waar R 'n willekeurige vaste ring met 'n eenheidselement is. Die versameling heelgetalle word aangedui met Z en die rasionale getalle met Q. Alle Afbeeldings wat gebruik word, is R-homomorfieë. Die injektiewe omhulsel van 'n moduul M word aangedui met E(M).

1. Definisie

'n Moduul M is *semiprojektief* as elke diagram van module

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "\phi"] & \\ B \arrow[r, "\gamma"] & C \arrow[r] & O \end{tikzcd}$$

met eksakte ry en C injektief, voltooi kan word om te kommuteer.

2. Voorbeelde

(1) Elke projektiewe moduul is semiprojektief.

(2) As $R = Z_4$ en $M = Z_2$ is $_RM$ semiprojektief maar nie projektief nie:
Beskou die diagram van R-module

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "1_M"] & \\ R \arrow[r, "\gamma"] & M \arrow[r] & O \end{tikzcd}$$

met γ die homomorfie geïnduseer deur $1 \mapsto 1$. As $\alpha : M \to R$ 'n homomorfie is, moet $\alpha(1) = 0$ of $\alpha(1) = 2$, maar in nie een van die gevalle is die diagram kommutatief nie. Dus is M nie projektief nie. Beskou verder 'n willekeurige diagram van R-module

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[r, dashed, "\alpha"] \arrow[d, "\phi"] & R \arrow[dl, dashed, "\beta"] \\ B \arrow[r, "\gamma"] & C \arrow[r] & O \end{tikzcd}$$

met eksakte ry en C injektief. Laat $\alpha : M \to R$ die monomorfie wees gedefinieer deur $\alpha(0) = 0$ en $\alpha(1) = 2$. Daar bestaan 'n homomorfie $\beta : R \to C$ só dat $\beta\alpha = \phi$. Ook bestaan 'n homomorfie $\delta : R \to B$ só dat $\gamma\delta = \beta$. Nou is $\psi = \delta\alpha : M \to B$ só dat $\gamma\psi = \phi$ en dus is M semiprojektief.

3. Stelling

Elke injektiewe semiprojektiewe moduul is projektief.

Bewys Beskou 'n willekeurige injektiewe semiprojektiewe moduul M en laat P 'n projektiewe moduul wees met $\gamma : P \to M$ 'n epimorfie. Daar bestaan 'n homomorfie $\psi : M \to P$ só dat $\gamma\psi = 1_M$. Dus is M as direkte sommand van P projektief. □

Volgens die gewone metodes kan bewys word dat direkte sommande van semiprojektiewe module semiprojektief is en dat elke direkte som van semiprojektiewe module semiprojektief is. 'n Homomorfe beeld van 'n semiprojektiewe moduul nie noodwendig semiprojektief nie.

4. Stelling

Ondermodule van semiprojektiewe module is semiprojektief.

Bewys Gestel N is 'n ondermoduul van 'n semiprojektiewe moduul M en beskou 'n willekeurige diagram

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\phi"'] & M \arrow[dll, dashed, "\beta"'] \arrow[dl, dashed, "\alpha"] \\ B \arrow[r, "\gamma"] & C \arrow[r] & O \end{tikzcd}$$

met eksakte ry, C injektief en ι die insluiting $N \rightarrow M$. Daar bestaan 'n homomorfie $\alpha : M \rightarrow C$ só dat $\alpha\iota = \phi$ en 'n homomorfie $\beta : M \rightarrow B$ só dat $\gamma\beta = \alpha$. Die homomorfie $\psi = \beta\iota : N \rightarrow B$ is só dat $\gamma\psi = \phi$. □

Uit Stelling 4 volg dat ondermodule van projektiewe module semiprojektief is. Volgens Stelling 5 is alle semiprojektiewe module ondermodule van projektiewe module.

5. Stelling

Die volgende bewerings is ekwivalent vir 'n moduul M:

(1) M is semiprojektief.

(2) Elke diagram van R-module

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, dashed] \arrow[d, "\phi"] & \\ B \arrow[r, "\gamma"] & E(M) \arrow[r] & O \end{tikzcd}$$

met eksakte ry en $\mathrm{Im}\,\phi \subseteq M$, kan voltooi word om te kommuteer.

(3) Elke diagram van R-module

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dashed] \arrow[d, "\iota"] & \\ B \arrow[r, "\beta"] & E(M) \arrow[r] & O \end{tikzcd}$$

met eksakte ry en ι die insluiting $M \rightarrow E(M)$, kan voltooi word om te kommuteer.

(4) Elke moduul B waarvan E(M) die epimorfe beeld is, bevat 'n ondermoduul isomorf aan M.

(5) M kan ingebed word in 'n vry moduul.

(6) M kan ingebed word in 'n projektiewe moduul.

Bewys (1) ⇒ (2): Gestel M is semiprojektief en laat 'n diagram soos in (2) gegee wees. Uit (1) volg dat 'n homomorfie $\theta : M \rightarrow B$ bestaan só dat $\gamma\theta = \iota$, waar ι die insluiting $M \rightarrow E(M)$ is. Die homomorfie $\theta\phi : A \rightarrow B$ sal die gegewe diagram laat kommuteer.
(3) ⇒ (4): Gestel $\eta : B \rightarrow E(M)$ is 'n epimorfie. Beskou die diagram

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dashed, "\psi"'] \arrow[d, "\iota"] & \\ B \arrow[r, "\eta"] & E(M) \arrow[r] & O \end{tikzcd}$$

met ι die insluiting $M \rightarrow E(M)$. Volgens aanname bestaan 'n homomorfie $\psi : M \rightarrow B$ só dat $\eta\psi = \iota$. Maar ι is 'n monomorfie en dus ook ψ. Gevolglik is $M \cong \psi(M) \subseteq B$.

Die implikasies (2) ⇒ (3) en (4) ⇒ (5) ⇒ (6) ⇒ (1) volg maklik. □

Alhoewel daar in die algemeen semiprojektiewe module is wat nie projektief is nie, is die begrippe ekwivalent oor hereditêre ringe.

6. Stelling

'n Ring R is links hereditêr as en slegs as elke semiprojektiewe R-moduul projektief is.*

Bewys Gestel R is links hereditêr en M is semiprojektief. Volgens Stelling 5 is M 'n ondermoduul van 'n projektiewe moduul en dus is M projektief. Gestel, omgekeerd, dat elke semiprojektiewe moduul projektief is. Aangesien ondermodule van projektiewe module semiprojektief is, volg dat ondermodule van projektiewe module projektief is. Dus is R links hereditêr.[2] □

Dit is bekend dat 'n ring R 'n QF (kwasie-Frobenius)-ring is as en slegs as elke injektiewe moduul projektief is.[3] In Stelling 7 word QF-ringe met behulp van semiprojektiwiteit gekarakteriseer.

7. Stelling

Die volgende bewerings is ekwivalent vir 'n ring R:

(1) R is QF.

(2) Elke injektiewe R-moduul is semiprojektief.

(3) Elke R-moduul is semiprojektief.

(4) Homomorfe beelde van semiprojektiewe module is semiprojektief.

Bewys

(1) ⇒ (2) en (3) ⇒ (4) is triviaal.

(2) ⇒ (3): As elke injektiewe moduul semiprojektief is, volg uit Stelling 3 dat elke eksakte ry $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow O$ met C injektief, verdeel. Dus is elke moduul semiprojektief.

(4) ⇒ (1): Laat E enige injektiewe moduul wees. Laat P 'n projektiewe moduul en $\eta : P \rightarrow E$ 'n epimorfie wees. Volgens aanname is E semiprojektief en dus volgens Stelling 3 projektief. Dus is R 'n QF-ring. □

'n Klas $\mathcal{E}$ van kort eksakte rye definieer 'n *hereditêre projektiwiteit* as alle ondermodule van module wat die projektiewe eienskap relatief tot die rye in $\mathcal{E}$ het, ook hierdie eienskap het. Uit Stelling 4 is dit duidelik dat die klas $\mathcal{E}_O$ van alle eksakte rye $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow O$ van R-module met C injektief, 'n hereditêre projektiwiteit definieer. Dit is nie bekend watter eienskappe nodig en voldoende is vir 'n klas eksakte rye om wel 'n hereditêre projektiwiteit te definieer nie. Die klas $\mathcal{E}_O$ definieer egter die „kleinste" hereditêre projektiwiteit aangesien alle module wat projektief is relatief tot rye in $\mathcal{E}_O$ (dit is die semiprojektiewe module), ook projektief is relatief tot die rye in elke ander klas $\mathcal{E}$ wat 'n hereditêre projektiwiteit definieer.

VERWYSINGS

1. Hauptfleisch, G.J. & Doman, D. (1976). Filtered-projective and semiflat modules, *Quaestiones Mathematicae*, 1, 197-217.
2. Fuchs, L. (1970). *Infinite abelian groups*. (Academic Press, New York & London).
3. Faith, C. & Walker, A.E. (1967). Direct-sum representations of injective modules, *Journal of Algebra*, 5, 203-221.