Radikaalklasse, samehangendhede en torsieteorieë

S. Veldsman
Departement Wiskunde, Universiteit van Port Elizabeth, Port Elizabeth 6000

UITTREKSEL

Die gelykheid al dan nie van radikaalklasse, torsieklasse en samehangendhede word ondersoek in 'n kategorie wat enige van die konkrete kategorieë kan wees waarin daar al 'n radikaalteorie, samehangendheidsteorie of 'n torsieteorie ontwikkel is. Onder meer word aangetoon dat elke samehangendheid 'n radikaalklas is. Die omgekeerde is egter nie waar nie. Indien 'n radikaaklas streng is, dan is dit 'n samehangendheid. Verder word bewys dat elke torsieklas 'n radikaalklas is en dat die omgekeerde nie in die algemeen geld nie. Elke radikaalklas wat die ADS-eienskap bevredig, is 'n torsieklas.

ABSTRACT

Radical classes, connectednesses and torsion theories

The equality or non-equality of radical classes, torsion classes and connectednesses is investigated in a category that could be any of the concrete categories in which a radical theory, connectednesses theory or a torsion theory have been developed. Among others, it is shown that every connectedness is a radical class. The converse is not true. If, however, a radical class is strict, then it is a connectedness. Furthermore it is proved that every torsion class is a radical class and the converse is not necessarily true. Every radical class with the ADS-property is a torsion class.

1. INLEIDING

Die aksiomatiese benadering ten opsigte van die radikaalklasse van assosiatiewe ringe en groepe wat in die vroeë vyftigerjare ingelui is deur Kurosh[9] en Amitsur,[1] het hom geleen tot die definiëring van 'n radikaalklas in 'n willekeurige kategorie. Bo en behalwe die gevolglike ontwikkeling van radikaalteorieë in verskeie algebraïese kategorieë, het Arhangel'skii en Wiegandt[3] in 1975 aangetoon dat hierdie kategoriële definisie van 'n radikaalklas, toegepas op die kategorie van topologiese ruimtes, ooreenstem met die van 'n samehangendheid soos deur Preuss[12,13] gedefinieer. 'n Radikaalteorie (hier genoem samehangendhede vanweë sy eienskappe) is deur Fried en Wiegandt[7] in 'n kategorie van grafieke ontwikkel. In 'n Abelse kategorie is die radikaalklasse presies die torsieklasse in die sin van Dickson.[5] In die kategorie van topologiese groepe is dit sinvol om 'n radikaalteorie en 'n samehangendheidsteorie te ontwikkel vanweë die algebraïese en topologiese eienskappe van hierdie kategorie.[14] Radikaalteorieë is ook ontwikkel in verskeie ander kategorieë en in sommiges is dit so dat die radikaalklasse, torsieklasse en samehangendhede saamval, alhoewel dit nie in die algemeen hoef te geld nie. Die behoefte bestaan dus om in 'n willekeurige kategorie die onderlinge verwantskappe tussen hierdie drie benaderings uit te lig en voorwaardes te gee waaronder hulle saamval. Dit sal ons doen in 'n kategorie K, onderhewig aan sekere voorwaardes, maar algemeen genoeg om enige van die konkrete kategorieë te wees waarin daar al 'n radikaalteorie, torsieteorie of 'n samehangendsheidsteorie ontwikkel is. K kan dan byvoorbeeld enige van die volgende kategorieë wees: *Rng* (assosiatiewe ringe), *Arng* (alternatiewe ringe), *Narng* (nie-noodwendig assosiatiewe ringe), *Grp* (groepe), *Ab* (Abelse groepe), *Topgrp* (topologiese groepe), *Fogrp* (totaal geordende groepe), *R-mod* (R-modules), *Top* (topologiese ruimtes), *Graph* (alle ongerigte grafieke wat lusse toelaat (sien Fried en Wiegandt[7]) en *S-act* ('n bikategorie van unêre algebras soos gedefinieer in Lex en Wiegandt[11]). In die algemeen, laat K 'n konkrete kategorie wees só dat as $\mathcal{M}$ die klas van alle inbeddings (sien 34.G in Herrlich en Strecker[8]) is, dan is daar 'n klas $\mathcal{E}$ van epimorfieë in K só dat K 'n $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-kategorie in die sin van Herrlich en Strecker[8] is. Laat $\bar{\mathcal{M}} = \{f | f \text{ is 'n vesel}\}$ (waar vesel 'n 'fiber' in Engels is, Tiller[16]). Ons kan net noem dat as K 'n nulobjek het, dan is $\bar{\mathcal{M}}$ die klas van alle normale monomorfieë. Ons veronderstel dat K die volgende voorwaardes bevredig:

(K1) Die klas van triviale objekte Φ (sien Buys e.a.[4]) is nie leeg nie en vir elke objek X in K is daar objekte T en T′ in Φ en morfieë $X \rightarrow T$ en $T' \rightarrow X$.

(K2) As $f : A \rightarrow B$ 'n epimorfie en $g : B \rightarrow C$ 'n morfie is só dat fg konstant is, dan is g ook konstant.

Dan is $\bar{\mathcal{M}} \subseteq \mathcal{M}$, die klas van isomorfieë van K is bevat in $\mathcal{E} \cap \bar{\mathcal{M}}$ en $\bar{\mathcal{M}}$ is geslote onder samestelling met isomorfieë. Verder is die klas van alle kokerne in K (sien Tiller[16]) bevat in $\mathcal{E}$. Gerieflikheidshalwe sal ons veronderstel dat elke klas objekte onder bespreking abstrak is (d.w.s. geslote is onder isomorfe beelde) en ook Φ omvat.

2. NODIGE DEFINISIES EN RESULTATE

Laat $\mathcal{B}$ 'n klas objekte in K wees. $\mathcal{B}$ heet *erflik* as $f : A \rightarrow B$ met $f \in \bar{\mathcal{M}}$ en $B \in \mathcal{B}$ impliseer dat $A \in \mathcal{B}$. $\mathcal{B}$ heet *sterk erflik* as $f : A \rightarrow B$ met $f \in \mathcal{M}$ en $B \in \mathcal{B}$ impliseer dat $A \in \mathcal{B}$. $\mathcal{B}$ heet *ko-erflik* as $f : B \rightarrow A$ met $f \in \mathcal{E}$ en $B \in \mathcal{B}$ impliseer dat $A \in \mathcal{B}$.

Ons sal die volgende operatore op 'n klas $\mathcal{B}$ van objekte beskou:

$\mathcal{U}B$ = {X| as f: X → A met f ∈ $\mathcal{E}$ en A ∉ Φ, dan is A ∉ B}

$\mathcal{S}B$ = {X| as f: A → X met f ∈ $\bar{\mathcal{M}}$ en A ∉ Φ, dan is A ∉ B}

cB = {X| elke morfie X → B met B ∈ B is konstant}

dB = {X| elke morfie B → X met B ∈ B is konstant}.

B heet 'n:

1. *Radikaalklas* as dit die volgende twee voorwaardes bevredig:
   (R1) As B ∈ B en f: B → A met f ∈ $\mathcal{E}$ en A ∉ Φ, dan is daar 'n m: I → A met m ∈ $\bar{\mathcal{M}}$, I ∉ Φ en I ∈ B.
   (R2) As daar vir elke f: B → A met f ∈ $\mathcal{E}$ en A ∉ Φ, 'n m: I → A met m ∈ $\bar{\mathcal{M}}$, I ∉ Φ en I ∈ B is, dan is B ∈ B.
2. *Half-enkelvoudige klas* as dit die volgende twee voorwaardes bevredig:
   (S1) As B ∈ B en f: A → B met f ∈ $\bar{\mathcal{M}}$ en A ∉ Φ, dan is daar 'n m: A → I met m ∈ $\mathcal{E}$, I ∉ Φ en I ∈ B.
   (S2) As daar vir elke f: A → B met f ∈ $\bar{\mathcal{M}}$ en A ∉ Φ, 'n m: A → I met m ∈ $\mathcal{E}$, I ∉ Φ en I ∈ B is, dan is B ∈ B.
3. *Samehangendheid* as daar 'n klas objekte D is só dat B = cD.
4. *Onsamehangendheid* as daar 'n klas objekte C is só dat B = dC.

'n Ry $(A_i \xrightarrow{g_i} A \xrightarrow{f} B)$ heet 'n *kort eksakte ry* (sien Veldsman[17]) as $(A_i \xrightarrow{g_i} A)_I$ die sink van al die vesels van f is en f die kokern van die sink is.

As A en B klasse van objekte is, dan heet die paar (A, B) 'n *torsieteorie* as $A \cap B$ = Φ, A ko-erflik is, B erflik is en daar vir elke objek X 'n kort eksakte ry $(A_i \xrightarrow{f_i} X \xrightarrow{f} B)_I$ is met $A_i \in A$ vir alle i ∈ I en B ∈ B. In so 'n geval heet A 'n *torsieklas* en B 'n *torsievrye klas*.

Deur verdere voorwaardes op ons kategorie te plaas (sien Veldsman[17]), kan bewys word dat daar vir enige objek X in K en vir elke radikaalklas B in K daar 'n kort eksakte ry $(B_i \xrightarrow{f_i} X \xrightarrow{f} A)$ is met $B_i \in B$ vir elke i ∈ I en A ∈ $\mathcal{S}B$. Om al die rompslomp van hierdie voorwaardes te vermy, sal ons net volstaan met die volgende (en laaste) voorwaarde op ons kategorie:

(K3) Vir elke radikaalklas en vir elke objek in K is daar 'n kort eksakte ry van bogenoemde vorm.

As K 'n nulobjek het en R enige radikaalklas is, is hierdie kort eksakte ry die bekende ry $R(A) \to A \to A/_{R(A)}$ waar R(A) die radikaal van A is.

Somige van die volgende resultate is in Buys e.a.[4] bewys en die bewyse van die ander is òf triviaal òf soortgelyk aan die bewyse van ooreenstemmende resultate in Fried en Wiegandt[7]:

1. B is 'n radikaalklas ass B ko-erflik is en voorwaarde (R2) bevredig ass B = $\mathcal{US}B$.
2. B is 'n half-enkelvoudige klas ass B = $\mathcal{SU}B$.
3. B is 'n samehangendheid ass B = cd$B$.
4. B is 'n onsamehangendheid ass B = dc$B$.
5. As B erflik (ko-erflik) is, dan bevredig B voorwaarde (S1) (voorwaarde (R1) respektiewelik).
6. As B voorwaarde (S1) bevredig, dan is $\mathcal{U}B$ 'n radikaalklas. Dus, as B 'n half-enkelvoudige klas is, is $\mathcal{U}B$ 'n radikaalklas en die paar ($\mathcal{U}B$, B) heet 'n ooreenkomstige paar radikaal- half-enkelvoudige klasse.
7. As B 'n radikaalklas is, dan is $\mathcal{S}B$ 'n half-enkelvoudige klas.
8. As B 'n samehangendheid is, dan is dB 'n onsamehangendheid en die paar (B, dB) heet 'n ooreenkomstige paar samehangendhede en onsamehangendhede.
9. As B 'n onsamehangendheid is, dan is cB 'n samehangendheid.
10. d(B) is mono-erflik en dB ⊆ $\mathcal{S}B$ vir enige klas B.
11. cB is epi-(ko-erflik) en cB ⊆ $\mathcal{U}B$ vir enige klas B. Die gelykheid cB = $\mathcal{U}B$ geld as B sterk erflik is.

3. RADIKAALKLASSE EN TORSIETEORIEË

3.1 Stelling

As (A, B) 'n torsieteorie is, dan is A = $\mathcal{U}B$ en B = $\mathcal{S}A$.

Bewys

Laat A ∈ A en f : A → B met f ∈ $\mathcal{E}$ en B ∉ Φ. Omdat A ko-erflik is, is B ∈ A en dus is B nie in B nie, want B ∉ Φ. Omgekeerd, as A ∈ $\mathcal{U}B$, beskou die kort eksakte ry $(A_i \xrightarrow{f_i} A \xrightarrow{f} B)_I$ met $A_i \in A$ vir elke i ∈ I en B ∈ B. Uit die definisie van $\mathcal{U}B$ volg dat B ∈ Φ. Dus is f konstant en f_i 'n isomorfie vir elke i ∈ I. Omdat A ko-erflik is en $A_i \in A$ vir elke i ∈ I volg dus dat A ∈ A. Die bewys vir B = $\mathcal{S}A$ is soortgelyk.

3.2 Gevolgtrekking

As (A, B) 'n torsieteorie is, dan is A 'n radikaalklas en B 'n erflike half-enkelvoudige klas.

Bewys

Omdat (A, B) 'n torsieteorie is, is B erflik en A = $\mathcal{U}B$ en B = $\mathcal{S}A$. Dus is A = $\mathcal{U}B$ = $\mathcal{US}A$ en B = $\mathcal{S}A$ = $\mathcal{SU}B$.

In die algemeen, as A 'n radikaalklas is met (A, B) 'n ooreenstemmende paar radikaal- half-enkelvoudige klasse, dan hoef (A, B) nie 'n torsieteorie te wees nie. Alhoewel $A \cap B$ = $A \cap \mathcal{S}A$ = Φ, A ko-erflik is en die bestaan van die kort eksakte ry (gegee deur (K3)) altyd vir 'n radikaalklas geld, hoef B nie noodwendig erflik te wees nie. In die kategorie *Narng* het Leavitt en Armendariz[10] bewys dat daar nie-erflike half-enkelvoudige klasse is. Wanneer sal radikaalteorieë en torsieteorieë saamval? Hiervoor het ons die ADS-eienskap nodig (sien Veldsman[17]): 'n Radikaalklas B het die *ADS-eienskap* as vir enige m: A → B, m ∈ $\bar{\mathcal{M}}$ geld dat $f_i m \in \bar{\mathcal{M}}$ *waar* $(B_i \xrightarrow{f_i} A \xrightarrow{f} C)_I$ die kort eksakte ry met $B_i \in B$ vir elke i ∈ I en C ∈ $\mathcal{S}B$ is. Die kategorie K het dan die ADS-eienskap as elke radikaalklas die ADS-eienskap het. Hierdie eienskap word so genoem ter ere van Anderson, Divinsky en Sulinski wat in 1968 (sien Anderson e.a.[2]) bewys het dat dit geld in die kategorieë *Rng* en *Arng*. Die ontwikkeling van 'n aksiomatiese benadering t.o.v. radikaalklasse is aanvanklik gekortwiek deur die nie-transitiewiteit van die relasie "ideaal van". Met die bewys van hierdie resultaat is 'n groot struikelblok oorkom. Ons kan net noem dat as $\bar{M}$ geslote is onder samestelling, dan volg die triviaal dat die kategorie die ADS-eienskap het.

3.3 Stelling

Laat A 'n radikaalklas wees met die ADS-eienskap. Dan is SA erflik.

Bewys

Laat $X \in SA$ met $m : A \to X$, $m \in \bar{M}$ en $A \notin \Phi$. Laat $(A_i \xrightarrow{g_i} A \xrightarrow{g} B)_I$ die kort eksakte ry wees met $A_i \in A$ vir alle $i \in I$ en $B \in SA$. Uit die ADS-eienskap volg dat $g_i m : A_i \to X$ in $\bar{M}$ is vir elke $i \in I$. Omdat $X \in SA$, is $A_i \in \Phi$ vir alle $i \in I$. Dus is g_i konstant vir elke $i \in I$, waaruit dit volg dat g 'n isomorfie moet wees. Omdat $B \in SA$, volg dus dat $A \in SA$ is.

3.4 Gevolgtrekkings

(1) As A 'n radikaalklas is met die ADS-eienskap, dan is (A, SA) 'n torsieteorie.
(2) As K die ADS-eienskap het, dan geld: (A, B) is 'n torsieteorie ass (A, B) 'n ooreenstemmende paar radikaal-half-enkelvoudige klasse is.

Alhoewel $M \neq \bar{M}$ in die kategorieë *Rng*, *Arng*, *Grp*, *Fogrp* en *Topgrp*, het elk van hierdie kategorieë die ADS-eienskap. In die kategorieë *R-mod*, *Ab*, *Top*, *Graph* en *S-act* is $M = \bar{M}$ en omdat M geslote is onder samestelling, volg dat hierdie kategorieë ook die ADS-eienskap het.

4. RADIKAALKLASSE EN SAMEHANGENDHEDE

4.1 Stelling

Elke samehangendheid is 'n radikaalklas.

Bewys

Laat A 'n samehangendheid wees. Dan is $A = cdA$ en omdat dA sterk erflik is, is $cdA = UdA$. Dus is $A = UdA$ 'n radikaalklas.

Nie elke radikaalklas is 'n samehangendheid nie. In die kategorie *Rng* is die Brown-McCoy radikaalklas nie 'n samehangendheid nie soos ons later sal bewys. Wanneer geld die omgekeerde? Net soos die ADS-eienskap 'n belangrike rol speel in die gelykheid van radikaalklasse en torsieklasse, is hier ook 'n eienskap, nl. dié van 'n streng radikaalklas, wat belangrik is. 'n Radikaalklas A heet *streng* as daar vir elke $m : A \to B$ met $A \notin \Phi$, $m \in M$ en $A \in A$, 'n $m' : A' \to B$ is met $A' \notin \Phi$, $m' \in \bar{M}$ en $A' \in A$. As $M = \bar{M}$ volg dit triviaal dat elke radikaalklas streng is.

4.2 Stelling

Laat A 'n radikaalklas wees. Die volgende voorwaardes is ekwivalent:

(1) A is streng.
(2) SA is sterk erflik.
(3) $SA = dA$.

Bewys

(1) ⇒ (2) : Laat $X \in SA$ en $m : A \to X$ met $m \in M$ en $A \notin \Phi$.

As $A \notin SA$, is daar 'n $m' : B \to A$ met $m' \in \bar{M}$, $B \notin \Phi$ en $B \in A$. Dan is $m'm : B \to X$ in M en omdat A streng is, is daar 'n $f: C \to X$ met $f \in \bar{M}$, $C \notin \Phi$ en $C \in A$. Maar dit is teenstrydig met $X \in SA$. Dus is $A \in SA$.

(2) ⇒ (3) : Dit geld altyd dat $dA \subseteq SA$. Laat $X \in SA$ en beskou $f : A \to X$ met $A \in A$. As $A \xrightarrow{e} B \xrightarrow{m} X$ die (E,M)-faktorisasie van f is, dan is $B \in SA$ omdat SA sterk erflik is en $B \in A$ omdat A ko-erflik is. Dus is $B \in A \cap SA = \Phi$ waaruit volg dat f konstant is. D.w.s. $X \in dA$.

(3) ⇒ (1) : Laat $m : A \to B$ met $m \in M$, $A \notin \Phi$ en $A \in A$. Dan is $B \notin SA$, want as $B \in SA = dA$, dan moet m 'n konstante monomorfie wees en A dus in Φ. D.w.s. daar is 'n $m' : A' \to B$ met $m' \in \bar{M}$, $A' \notin \Phi$ en $A' \in A$.

4.3 Stelling

Laat A 'n streng radikaalklas wees. Dan is A 'n samehangendheid en $(A, dA) = (A, SA)$ is 'n torsieteorie.

Bewys

Laat A 'n streng radikaalklas wees. Dan is $A = USA$ en $SA = dA$. Dus is $A = UdA$ en omdat dA sterk erflik is, is $A = cdA$. D.w.s. A is 'n samehangendheid. Die tweede bewering volg omdat $SA = dA$ sterk erflik (en dus ook erflik) is.

In die kategorieë *R-mod*, *Ab*, *Top*, *Graph* en *S-act* is $M = \bar{M}$ en dus is elke radikaalklas streng. In hierdie kategorieë volg dus dat radikaalklasse en samehangendhede saamval. In sommige kategorieë geld dat A 'n samehangendheid is as A 'n streng radikaalklas is. Voorbeelde van sulke kategorieë is *Rng* (bewys m.b.v. Stelling 2.1 en sy gevolgtrekkings in Stewart[15]) en *Topgrp* (Stelling 4.3 in Schoeman en Ohlhoff[14]). Of dit in die algemeen waar is, is nog 'n ope vraag. Nie elke radikaalklas is streng nie. In Divinsky e.a.[6], voorbeeld 3, word bewys dat as G die Brown-McCoy radikaalklas in *Rng* is, dan is SG nie erflik ten opsigte van eensydige ideale nie, en dus ook nie sterk erflik nie. Dus is G nie 'n streng radikaalklas nie, en dus nie 'n samehangendheid nie.

Uit die voorafgaande volg dus dat in kategorieë waar $M = \bar{M}$, die radikaalklasse, samehangendhede en torsieklasse saamval.

VERWYSINGS

1. Amitsur, S.A. (1952), A general theory of radicals I, *Amer. J. of Math.* 74, 774-786.
2. Anderson, T., Divinsky, N. & Suliński, A. (1965). Hereditary radicals in associative and alternative rings, *Canadian J. Math*, 17, 594-603.
3. Archangel'skii, A.V. & Wiegandt, R. (1975). Connectedness and disconnectedness in topology, *General Topology and Appl.*, 5, 9-33.

4. Buys, A., Groenewald, N.J. & Veldsman, S. (1981). Radical and semisimple classes in categories, Quaestiones Mathematicae, 4, 205-220.
5. Dickson, S.E. (1966). A torsion theory for Abelian categories, *Trans. Amer. Math Soc.*, 121, 223-235.
6. Divinsky, N., Krempa, J. & Suliński, A. (1971). Strong radical properties of alternative and associative rings, *J. of Algebra*, 17, 369-388.
7. Fried, E. & Wiegandt, R. (1975). Connectednesses and disconnectednesses of graphs, *Algebra Universalis*, 5, 411-428.
8. Herrlich, H. & Strecker, G.E. (1973). *Category theory*, Allyn and Bacon Inc., Boston.
9. Kurosh, A.G. (1953). Radicals of rings and algebras, *Mat. Sb. N.S.*, 33. (In Russies. Engelse vertaling in: *Coll. Math. I. Bolyai*, 6, Rings, modules and radicals, North Holland, 1973, 297-312.)
10. Leavitt, W.G. & Armendariz, R. (1967). Nonhereditary semisimple classes, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 18, 114-117.
11. Lex, W. & Wiegandt, R. Torsion theory for acts. Aanvaar vir publikasie in *Studia Sci. Math. Hungar.*
12. Preuss, G. (1970). Trennung und Zusammenhang, *Monatsh Math.*, 74, 70-87.
13. Preuss, G. (1971). Eine Galois-Korrespondenz in dei Topologie, *Monatsh Math.*, 75, 447-452.
14. Schoeman, M.J. & Ohlhoff, H.J.K. (1982). Radical and semisimple classes in Topgrp. *Comm. Math. Univ. Sancti. Pauli*, 31 (no. 2), 147-153.
15. Stewart, P.N. (1973). Strict radical classes of associative rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 39, 273-278.
16. Tiller, J.A. (1980). Component subcategories. *Quaestiones Mathematicae*, 4, 19-40.
17. Veldsman, S. (1982). On the characterization of radical and semisimple classes in categories, *Comm. in Algebra*, 10, 913-938.