Navorsings- en Oorsigartikels

Positiewe operatore in Banachroosters*

Peter van Eldik
Departement Wiskunde, Potchefstroomse Universiteit vir C.H.O.

UITTREKSEL

In hierdie oorsigartikel bespreek ons 'n aantal onlangse resultate in verband met ordeningseienskappe van klasse lineêre operatore in Banachroosters, met besondere verwysing na die klasse van kernoperatore en kompakte operatore.

ABSTRACT

Positive operators on Banach lattices

In this survey paper we discuss some recent developments in the theory of positive operators on Banach lattices and concentrate on order properties of classes of operators including kernel operators and compact operators.

In hierdie artikel wil ons graag van die onlangse ontwikkelings in die teorie van positiewe operatore in Banachroosters bespreek. Ons beperk die bespreking tot ontwikkelings in verband met *ordeningseienskappe* van klasse operatore, in besonder *kernoperatore* en *kompakte operatore*. Ons hoop om hierdeur die leser 'n kykie te gee in sommige van die navorsingsaktiwiteite op hierdie vakterrein.

1. NOTASIE EN TERMINOLOGIE

Ons verduidelik kortliks die basiese terminologie. Ander begrippe sal ons verduidelik wanneer dit nodig word.

'n Reële vektorruimte E voorsien van 'n parsiële ordening $\leq$, wat versoenbaar is met die algebraïese struktuur van E, só dat die supremum $x < y$ en die infimum $x > y$ van elke twee elemente x en y uit E weer aan E behoort, noem ons 'n *Rieszruimte* (of Rieszrooster). 'n Rieszruimte E waarop daar 'n norm gedefinieer is met die addisionele eienskappe dat as $0 \leq x \leq y$ dan is $\|x\| \leq \|y\|$ en $\|x\| = \||x|\|$ met $|x| = x < (-x)$ heet 'n *normeerde Rieszruimte*. As hierdie ruimte normvolledig is, noem ons dit 'n *Banachrooster*.

1.1 Voorbeelde van Banachroosters

(a) Die n-dimensionele Euklidiese ruimte $\mathbb{R}^n$.
In hierdie geval definieer ons vir elemente $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ die ordening $x \leq y$ deur

$$x_i \leq y_i \text{ vir } i = 1, 2, \ldots, n \text{ en } \|x\| = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right]^{1/2}.$$

(b) Die ruimte C[0,1] van reële kontinue funksies gedefinieer op [0,1]. In hierdie geval is $f \leq g$ as en slegs as $f(x) \leq g(x)$ vir alle $x \in [0,1]$ en $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$.

(c) Die ruimtes $L_p(X,\mu)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ van p-integreerbare funksies met betrekking tot 'n σ-eindige maatruimte (X,μ). Die ordening $f \leq g$ beteken in hierdie geval dat $f(x) \leq g(x)$ vir μ-byna alle $x \in X$ en die gebruiklike norm word gegee deur

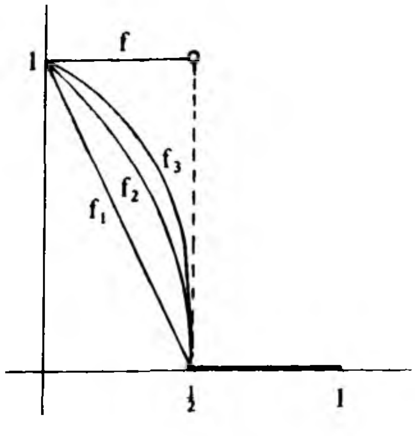
$$\|f\|_p = \begin{cases} (\int_X |f|^p d\mu)^{1/p} & \text{as } 1 \leq p < \infty \\ \text{ess sup } (|f(x)| : x \in X) & \text{as } p = \infty \end{cases}$$

In die algemeen beskou ons die Rieszruimte $M(X,\mu)$ bestaande uit alle reëlwaardige μ-byna oral eindige meetbare funksies. Daar bestaan verskeie deelruimtes van $M(X,\mu)$ wat onder 'n geskikte norm Banachroosters vorm, byvoorbeeld L_p-ruimtes, Orliczruimtes en normeerde Kötheruimtes (Banachfunksieruimtes).

Ons noem 'n Rieszruimte E *Dedekind-volledig* as elke nie-leë deelversameling van E wat van bo begrens is, 'n supremum in E het. Voorbeelde a) en c) het hierdie eienskap. Die ruimte in voorbeeld b) is egter nie Dedekind-volledig nie: Beskou 'n ry (f_n) in C[0,1] gedefinieer deur

$$f_n(x) = \begin{cases} (1-2x)^{1/n} & \text{as } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{as } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

vir n = 1, 2, . . .



---

*Hierdie artikel is gebaseer op 'n uitgenooide oorsiglesing deur die skrywer gelewer tydens die 1982-jaarkongres van die Suid-Afrikaanse Wiskundevereniging.

Finansiële steun van die W.N.N.R. word met dank erken.

Dan geld dat $f_n(x)\uparrow_n f(x)$ puntsgewys met

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ as } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 \text{ as } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Hierdie ry funksies het egter nie 'n supremum in C[0,1] nie.

In die teorie van Rieszruimtes is daar twee klasse deelruimtes wat van fundamentele belang is. 'n Lineêre deelruimte $A \cap E$ heet 'n (orde) *ideaal* in E wanneer uit $f \in A$, $g \in E$ en $|g| \leq |f|$ volg dat $g \in A$. Die ideaal A noem ons 'n *band* in E as vir elke deelversameling $D \cap A$ waarvan $f = \sup D$ bestaan in E, geld dat $f \in A$.

1.2 Voorbeelde

In die ruimte C[0,1] is

a) die deelruimte bestaande uit die konstante funksies nie 'n ideaal nie;
b) die deelruimte bestaande uit alle $f \in C[0,1]$ met $f(o) = 0$ 'n ideaal in C[0,1] maar nie 'n band nie;
c) die deelruimte bestaande uit alle $f \in C[0,1]$ met $f(x) = 0$ vir $x \in [0, \frac{1}{2}]$ 'n band in C[0,1].

Laat E en F Rieszruimtes wees. Ons noem 'n lineêre operator $T: E \rightarrow F$ *positief* as $Tx \geq 0$ vir alle $0 \leq x \in E$. Dit stel ons in staat om 'n parsiële ordening in die vektorruimte van alle lineêre operatore van E in F in te voer. Ons definieer $T_1 \leq T_2$ as $T_2 - T_1$ 'n positiewe operator is. 'n Belangrike deelruimte is die ruimte $L_b(E,F)$ van *ordebegrensde operatore*, d.i. lineêre operatore wat ordebegrensde versamelings afbeeld in ordebegrensde versamelings. ('n Versameling $A \cap E$ heet ordebegrens as daar 'n element $0 \leq g \in E$ bestaan só dat $|f| \leq g$ vir alle $f \in A$.) Onder die aanname dat F 'n Dedekind-volledige Rieszruimte is, is 'n operator T ordebegrens as en slegs as $T = T_1 - T_2$ met T_1 en T_2 positiewe operatore, en in hierdie geval is $L_b(E,F)$ 'n (Dedekind-volledige) Rieszruimte.

Dit is van belang om op te merk dat as E 'n Banachrooster en F 'n Dedekind-volledige normeerde Rieszruimte is, dan is elke ordebegrensde operator ook normbegrens ([19], p. 84).

1.3 Voorbeelde van ordebegrensde operatore

a) Laat $E = \mathbb{R}^n$ en $F = \mathbb{R}^m$. Dit is bekend dat ons met elke lineêre operator $T: E \rightarrow F$ 'n $m \times n$-matriks $[a_{ij}]$ kan assosieer. Dui ons met $[a_{ij}^+]$ die matriks aan verkry deur a_{ij} te vervang met $a_{ij}^+ = \text{maks}(a_{ij},0)$ en met $[a_{ij}^-]$ die matriks met $a_{ij}^- = \text{maks}(-a_{ij},0)$ dan is $[a_{ij}] = [a_{ij}^+] - [a_{ij}^-]$. As T_1 en T_2 lineêre operatore is wat geassosieer word met $[a_{ij}^+]$ en $[a_{ij}^-]$ respektiewelik, dan het ons dat $T = T_1 - T_2$ met T_1 en T_2 positief. Gevolglik is T 'n ordebegrensde operator.
b) Die lineêre operator $T: L_p(X,\mu) \rightarrow L_p(X,\mu)$, $1 \leq p \leq \infty$, $X = [0,1]$ en μ die Lebesgue-maat, gedefinieer deur

$$Tf(x) = \int_X T(x,y)f(y)d\mu(y) \text{ met } T(x,y) = |x-y|^{-1/4}$$

is 'n voorbeeld van 'n positiewe (en dus normbegrensde) kernoperator ([23], p. 234).

Vir verdere basiese eienskappe van Banachroosters en ordebegrensde operatore verwys ons die leser na die boeke van Luxemburg en Zaanen [16], [24] en Schaefer [19].

2. ORDENINGSEIENSKAPPE VAN KERNOPERATORE

Die eerste klas ordebegrensde operatore wat ons graag wil bespreek, is die klas kernoperatore waarvan 1.3b) 'n voorbeeld is.

Ons dui met $E(X,\mu)$ en $F(X,\mu)$ ideale (Rieszruimtes) van meetbare funksies aan. 'n Lineêre operator $T: E \rightarrow F$ is 'n *kernoperator* as

$$Tf(x) = \int_X T(x,y)f(y)d\mu(y) \text{ en } \int_X |T(x,y)f(y)|d\mu(y) \in F$$

vir elke $f \in E$ met $T(x,y)$ 'n $\mu \times \mu$-meetbare funksie genoem die *kern* van T.

Hierdie voorwaardes impliseer dat T 'n ordebegrensde operator is. Die eienskappe van hierdie klas van operatore is deeglik bestudeer in verskeie vertakkings van die ontwikkeling van Funksionaalanalise. Die belangrikheid hiervan in Hilbertruimteteorie (sien byvoorbeeld [23]), integraalvergelykings in Lebesgueruimtes [13] en Fredholmteorie ([23], [8], [18]) is reeds duidelik bewys.

In 1963 het Luxemburg en Zaanen [14] 'n fundamentele artikel oor die kompaktheid van hierdie operatore in die raamwerk van normeerde ideale van meetbare funksies gepubliseer. Baie van die gedagtes in hierdie inspirerende artikel is reeds gebruik om resultate in meer algemene raamwerke te verkry (sien byvoorbeeld [21], [7] en [4]).

Uit hierdie artikel en verwante werk ontstaan ook die volgende vraag: *Watter ordeningseienskappe het die versameling van kernoperatore?* Meer in besonder:

(a) As $0 \leq S \leq T: E \rightarrow F$ en T is 'n kernoperator, impliseer dit dat S 'n kernoperator is?
(b) As T 'n kernoperator is, is $|T| = T < (-T)$ 'n kernoperator?

In 1971 gee Luxemburg en Zaanen [15] 'n positiewe antwoord op vraag (b) deur aan te toon dat as T 'n kern $T(x,y)$ het, dan het $|T|$ die kern $|T(x,y)|$. Tydens die Rieszruimtekonferensie te Oberwolfach, Wes-Duitsland in Junie 1975, het vraag (a) weer na vore getree. Kort hierna het A.R. Schep [20] (1977) aangetoon dat 'n baie sterker resultaat geld.

2.1 Stelling *Die versameling K van kernoperatore vorm 'n band in $L_b(E,F)$.*

Dit impliseer in besonder dat as $T \in K$ en $S \in L_b(E,F)$ met $|S| \leq |T|$ dan is $S \in K$. Ook geld dat as $T = \sup_\alpha T_\alpha$ met $T_\alpha \in K$ vir alle α, dan is $T \in K$.

Ons moet hier ook die naam vermeld van die Russiese wiskundige Buhvalov [5]. Dit blyk dat hy reeds in 1973/74 geweet het dat hierdie versameling inderdaad 'n band vorm – dit was egter onbekend in die Westerse wêreld.

Hierdie resultaat het tot 'n verdere interessante vraag aanleiding gegee: *Is dit moontlik om 'n*

eksplisiete beskrywing vir hierdie band te gee?

Laat $E_{oo}^{\sim}$ die versameling van alle ordekontinue ordebegrensde funksionale op E aandui, d.i. ϕ behoort tot $E_{oo}^{\sim}$ as uit $u_\tau \downarrow_\tau 0$ in E volg dat $\inf_\tau |\phi(u_\tau)| = 0$.

Vir $\psi \in E_{oo}^{\sim}$ en $f \in F$ definieer ons die rang een operator $T:E \to F$ deur $Tx = (\psi \otimes f)(x) = \psi(x)f$, $x \in E$. Dan is T 'n ordebegrensde lineêre operator. Soos gebruiklik, dui ons in hierdie raamwerk met $E_{oo}^{\sim} \otimes F$ die versameling van alle operatore van eindige rang aan. Ons verkry dan [20]:

2.2 Stelling *Die band K van kernoperatore is gelyk aan die band voortgebring deur $E_{oo}^{\sim} \otimes F$ in $L_b(E,F)$, d.i. $K = (E_{oo}^{\sim} \otimes F)^{dd}$.*

In 1978 verkry Buhvalov [6] (sien ook [20]) 'n ordeteoretiese karakterisering vir *K* wat ons soos volg kan formuleer.

2.3 Stelling *As $0 \leq T:E \to F$ met E en F ideale van meetbare funksies, dan is T 'n kernoperator as slegs as T die volgende eienskap het: As $0 \leq u_n \leq u \in E$ en $u_n(x) \xrightarrow{*} 0$ dan geld dat $Tu_n(x) \to 0$ puntsgewys μ-byna oral as $n \to \infty$.*

Die notasie $u_n(x) \xrightarrow{*} 0$ (sterpuntsgewyse konvergensie) beteken dat elke deelry van (u_n) 'n deelry het wat puntsgewys μ-byna oral na nul konvergeer.

Bostaande resultaat het ons gemotiveer om in die raamwerk van algemene Rieszruimtes E en F die band $(E_{oo}^{\sim} \otimes F)^{dd} \cap L_b(E,F)$ van *abstrakte kernoperatore* te ondersoek. Dit is dan moontlik om analoog aan 2.3 'n ordeteoretiese karakterisering te verkry. In hierdie abstrakte formulering is puntsgewyse konvergensie (sterpuntsgewyse konvergensie) vervang deur ordekonvergensie (sterordekonvergensie) (sien [9], 1980).

Hierdie resultaat het aanleiding gegee tot interessante toepassings. Dit stel ons in staat om die eienskappe van ander klasse operatore, byvoorbeeld die klas Carlemanoperatore, in die algemene raamwerk van Rieszruimtes te ondersoek ([10], [11]). Die situasie kan ook ontstaan waarby $T:E \to F$ 'n lineêre operator is wat ordebegrens is wanneer T beskou word as 'n afbeelding $T:E \to F^u$ met F^u 'n Rieszruimte só dat $F \cap F^u$. Aangesien dit ook by kernoperatore voorkom, het dit aanleiding gegee tot *uitgebreide abstrakte kernoperatore*. Bogenoemde resultate kan veralgemeen word om hierdie situasie te dek. Dit gee aanleiding tot nuwe karakteriserings van die band *K* in terme van Egoroffkompakte versamelings. Hieroor het ons by die onlangse Rieszruimtekongres te Oberwolfach in Junie 1982 rapporteer [12].

3. ORDENINGSEIENSKAPPE VAN KOMPAKTE OPERATORE

Die tweede gedeelte van hierdie artikel handel oor die ordeningseienskappe van kompakte operatore in Banachroosters. As E en F Banachroosters is, dan is 'n lineêre operator $T:E \to F$ *kompak* as die beeld van elke normbegrensde versameling in E prekompak in F is (d.i. as elke ry (Tx_n), met $\|x_n\| \leq M$ vir alle n, 'n normkonvergente deelry (Tx_{1n}) het).

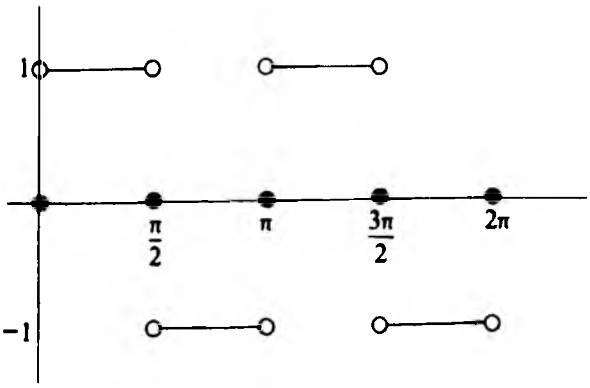
Een van die eerste vrae wat ontstaan wanneer ons die ordeningseienskappe van sulke operatore ondersoek, is: *As $0 \leq S \leq T:E \to F$ en T is 'n kompakte operator, impliseer dit dat S 'n kompakte operator is?*

In die algemeen het hierdie vraag 'n negatiewe antwoord en ons illustreer dit aan die hand van die volgende voorbeeld:

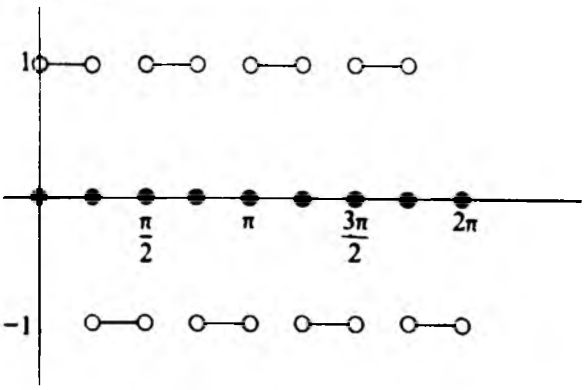
3.1 Voorbeeld

Dui met (r_n) die ry Rademacherfunksies op $[0, 2\pi]$ aan gedefinieer deur $r_n(x) = \mathrm{sgn}(\sin 2^n x)$, $x \in [0, 2\pi]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

As n = 1:



As n = 2:



Soos gebruiklik, skryf ons $r_n^+(x) = \text{maks}(r_n(x), 0)$ en as ons 'n versameling van Lebesguemaat nul v.. - waarloos, dan het die funksie r_n^+ die waarde een op 'n versameling van maat π en die waarde nul op die oorblywende versameling van maat π. Definieer vervolgens operatore $S,T:\ell_1 \rightarrow L_2([0,2\pi], \mu)$ vir $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots) \in \ell_1$ deur

$$S(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n r_n^+ \text{ en } T(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \chi_{[0,2\pi]}$$

waarby $\chi_{[0,2\pi]}(x) = 1$ vir alle $x \in [0, 2\pi]$.

Dan is $0 \leq S \leq T$ en T is 'n kompakte operator, aangesien dit 'n operator van rang een is. As (e_n) die ry van eenheidsvektore in ℓ_1 aandui, dan is $Se_n = r_n^+$ en vir $m > n$ volg uit die feit dat $|r_m^+ - r_n^+|$ die waarde een op 'n versameling van maat π en die waarde nul op die oorblywende versameling van maat π aanneem, dat

$$\|Se_m - Se_n\|_2^2 = \|r_m^+ - r_n^+\|_2^2 = \pi. \text{ Gevolglik is S nie}$$

'n kompakte operator nie.

In 1973 het Nagel en Schlotterbeck [17] aangetoon dat die bogenoemde vraag waar is in die geval van *kompakte kernoperatore* tussen ruimtes E en F wat aan addisionele voorwaardes voldoen. Hiervoor benodig ons die begrip van ordekontinue norm. 'n Banachrooster E het *ordekontinue norm* as die ruimte Dedekind-volledig is en as $0 \leq x_n \downarrow_n 0$ impliseer dat $\|x_n\| \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$. Bekende voorbeelde van ruimtes met hierdie eienskap is ℓ_p en $L_p(X,\mu)$ met $1 \leq p < \infty$.

Hierdie begrip het ook 'n belangrike rol gespeel in die verkryging van ekwivalente voorwaardes vir die kompaktheid van (abstrakte) kernoperatore in die raamwerk van normeerde ideale van meetbare funksies en Banachroosters (sien byvoorbeeld [14], [7] en [21]).

Ons eerste positiewe resultaat vir kompakte operatore is

3.2 Stelling *Laat E, F en G Banachroosters wees. Beskou operatore $0 \leq S_1 \leq T_1: E \rightarrow F$ en $0 \leq S_2 \leq T_2: F \rightarrow G$ en neem aan dat E' of G ordekontinue norm het. As T_1 en T_2 kompakte operatore is, dan is S_2S_1 'n kompakte operator.*

In die besonder, as $0 \leq S \leq T: E \rightarrow E$ en E' of E het ordekontinue norm, dan impliseer die kompaktheid van T dat S^2 kompak is.

Ons benodig 'n belangrike feit om hierdie tipe resultaat te verkry. As $T \in L_b(E,F)$, dan sê ons T is *AM-kompak* as T orde-intervalle afbeeld in prekompakte deelversamelings van F. Hierdie terminologie vind sy oorsprong in die feit dat in AM-ruimtes (byvoorbeeld $L_\infty(X,\mu)$) ordebegrensdheid saamval met normbegrensdheid. Gevolglik: as E 'n AM-ruimte is, dan is 'n operator T AM-kompak as en slegs as dit kompak is. Onder die aanname dat F ordekontinue norm het, kan ons bewys dat die versameling van AM-kompakte operatore 'n band vorm in $L_b(E,F)$.

Ons verstrek 'n *Skets van die bewys van 3.2.*

Ons neem aan dat G ordekontinue norm het.

$$E \xrightarrow[0 \leq S_1 \leq T_1]{} F \xrightarrow[0 \leq S_2 \leq T_2]{} G$$

Laat B_E die eenheidsfeer van E aandui. Die prekompaktheid van $T_1(B_E)$ impliseer dat daar by gegewe $\varepsilon > 0$ 'n element $0 \leq f \in F$ bestaan só dat $T_1(B_E) \cap [-f,f] + \varepsilon B_F$. Uit die aanname $0 \leq S_1 \leq T_1$ volg dat S_1 ook hierdie eienskap het en dus geld $S_1(B_E) \cap [-f,f] + \varepsilon_1 B_F$ met $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{\|S_2\|}$. Die aanname dat T_2 kompak is, impliseer dat T_2 AM-kompak is en gevolglik is S_2 ook AM-kompak (gebruikmakend van die feit dat G ordekontinue norm het). Dit impliseer dat

$$S_2S_1(B_E) \cap S_2[-f,f] + \varepsilon B_G$$

en omdat hierdie versameling prekompak is, volg ten slotte dat S_2S_1 kompak is. In die geval dat E' ordekontinue norm het, kan dieselfde tipe argument gebruik word deur van die stelling van Schauder gebruik te maak. Δ

Indien ons die aannames in verband met die ordekontinuïteit van die norm weglaat, verkry ons die volgende resultaat.

3.3 Stelling *Beskou operatore*

$$E \xrightarrow[0 \leq S_1 \leq T_1]{} F \xrightarrow[0 \leq S_2 \leq T_2]{} G \xrightarrow[0 \leq S_3 \leq T_3]{} H$$

As die operatore T_i $(i = 1,2,3)$ kompak is, dan is $S_3S_2S_1$ 'n kompakte operator. In besonder, as $0 \leq S \leq T: E \rightarrow E$ en T is 'n kompakte operator dan is S^3 kompak.

Hierdie resultaat volg uit 3.2 en ons wil graag die slim argument wat hiervoor gebruik word, illustreer.

Skets van die bewys van 3.3

Soos vantevore, by gegewe $\varepsilon > 0$ bestaan daar 'n element $0 \leq f \in F$ só dat $S_1(B_E) \cap [-f,f] + \varepsilon_1 B_F$ met $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{\|S_2\| \, \|S_3\|}$.

Dit impliseer dat

$$S_3S_2S_1(B_E) \cap S_3S_2[-f,f] + \varepsilon B_H.$$

Dit is gevolglik voldoende om aan te toon dat $S_3S_2[-f,f]$ 'n prekompakte versameling in H is.

Ons beskou nou die situasie

$$[-f,f] \cap F \xrightarrow[0 \leq S_2 \leq T_2]{} G \xrightarrow[0 \leq S_3 \leq T_3]{} H.$$

Die ideaal F_f voortgebring deur f in F is onder 'n geskikte norm 'n AM-ruimte en die beperking van T_2 tot F_f is weer eens kompak. Aangesien die toegevoegde ruimte van F_f ordekontinue norm het, kan ons 3.2 toepas, waaruit volg dat die operator S_3S_2 beperk tot F_f kompak is. Dit voltooi die bewys. Δ

Daar bestaan teenvoorbeelde wat aantoon dat bogenoemde resultate nie verbeter kan word nie [1].

Terugkerend na ons oorspronklike vraag, geld die volgende resultaat.

3.4 Stelling *As $0 \leq S \leq T:E \rightarrow E$ met E' en F van ordekontinue norm en as T kompak is, dan is S 'n kompakte operator.*

Die bewys van hierdie diep resultaat maak ook gebruik van die argumente genoem in 3.2 en 3.3 en ons gaan nie op die tegniese besonderhede in nie.

Daar is weinig meer bekend oor die ordeningseienskappe wat kompakte operatore openbaar. Selfs onder die aannames dat E' en F ordekontinue norms het is dit nie waar dat die versameling kompakte operatore 'n ideaal in $L_b(E,F)$ vorm nie. Die kompaktheid van T impliseer nie die kompaktheid van |T| nie (sien [19], p. 231).

Ons verstrek 'n paar historiese gegewens oor bogenoemde resultate: Tydens die Rieszruimtekonferensie in Oberwolfach in 1977 het Dodds en Fremlin [7] stelling 3.4 aangekondig. Hulle bewys was egter baie ingewikkeld en verskeie groepe wat op hierdie studieterrein werk het probeer om sake te vereenvoudig. Ons noem hier die name van Zaanen, Vietsch [22] en Schep in Leiden en Aliprantis en Burkinshaw in die Verenigde State van Amerika. Laasgenoemde twee persone het tydens hulle ondersoek stellings 3.2 en 3.3 ontdek en dit in Oberwolfach in 1979 aangekondig [1]. Die sketse van die bewyse wat ons in hierdie artikel gegee het, is 'n vereenvoudiging van hulle werk en is geneem uit die manuskrip Riesz Spaces II deur Zaanen [24] wat vroeg in 1983 verskyn.

Ons wil graag beklemtoon dat die vroeëre resultate oor die kompaktheid van kernoperatore 'n beslissende rol gespeel het in die verkryging van die algemene resultate hierbo genoem.

Samevattend: Dit was ons doel om verslag te lewer oor die ordeningseienskappe van kernoperatore en kompakte operatore. Soortgelyke vrae kan geformuleer word vir ander klasse operatore, byvoorbeeld die swakkompakte operatore en die Dunford-Pettis-operatore (sien [2] en [3]). Ons is van mening dat daar nog heelwat ondersoek op hierdie terrein gedoen kan word.

LITERATUURLYS

1. Aliprantis, C.D. & Burkinshaw, O. (1980) Positive compact operators in Banach lattices, *Math. Z.*, **174**, 289-298.
2. Aliprantis, C.D. & Burkinshaw, O. (1981). On weakly compact operators on Banach lattices, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **83**, 573-578.
3. Aliprantics, C.D. & Burkinshaw, O. (1982). Dunford-Pettis operators on Banach lattices. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **274**, 227-238.
4. Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O. & Duhoux, M. (1982). Compactness properties of abstract kernel operators, *Pac. J. Math.*, **100** (1), 1-22.
5. Buhvalov, A.V. (1975). Integral representability criterion for linear operators. *Funktsional'nyi Analizi Ego Priloh.*, **9**(1), 51.
6. Buhvalov, A.V. (1978). Integral representation of linear operators. *J. Soviet. Math.*, **9**(2), 129-137.
7. Dodds, P.G. & Fremlin, D.H. (1979). Compact operators in Banach lattices, *Israel J. Math.*, **34**(4), 287-320.
8. Grobler, J.J. (1970). *Non-singular linear integral equations in Banach function spaces*, Proefskrif, Leiden.
9. Grobler, J.J. & Van Eldik, P. (1980). A characterization of the band of kernel operators, *Quaest. Math.*, **4**, 89-107.
10. Grobler, J.J. & Van Eldik, P. (1981). Carleman-operatore in Rieszruimtes. *Mededelings SAWV*, 13/4, 197.
11. Grobler, J.J. & Van Eldik, P. (1983). Carleman operators in Riesz spaces. Aanvaar vir publikasie in *Indag. Math.*.
12. Grobler, J.J. & Van Eldik, P. (1983). *Approximation of kernel operators in Riesz spaces*. Technical Report FA31, Potchefstroomse Universiteit, September 1983.
13. Jörgens, K. (1970). *Lineare Integraloperatoren* (Teubner, Stuttgart).
14. Luxemburg, W.A.J. & Zaanen, A.C. (1963). Compactness of integral operators in Banach function spaces, *Math. Ann.*, **149**, 150-180.
15. Luxemburg, W.A.J. & Zaanen, A.C. (1971). The linear modulus of an order bounded linear transformation, *Indag. Math.* **33**, 422-447.
16. Luxemburg, W.A.J. & Zaanen, A.C. (1971). *Riesz Spaces I* (North-Holland, Amsterdam).
17. Nagel, R.J. & Schlotterbeck, U. (1973). Kompaktheit von Integraloperatoren auf Banachverbänden, *Math. Ann.* **202**, 301-306.
18. Raubenheimer, H. (1979). *Die Fredholm-teorie in Banachruimtes*. Proefskrif, Potchefstroomse Universiteit.
19. Schaefer, H.H. (1974). *Banach lattices and positive operators*. (Springer-Verlag, Berlin).
20. Schep, A.R. (1977). *Kernel operators*. Proefskrif, Leiden.
21. Van Eldik, P. & Grobler, J.J. (1979). Lebesgue-type convergence theorems in Banach lattices with applications to compact operators, *Indag. Math.* **41**(4), 425-437.
22. Vietsch, K. (1979). *Abstract kernel operators and compact operators*. Proefskrif, Leiden.
23. Zaanen, A.C. (1964). Linear Analysis (North-Holland, Amsterdam).
24. Zaanen, A.C. (1983). *Riesz spaces II*, (North-Holland, Amsterdam).